数理解析研究所講究録
573巻 1985年 42-110

2-超函数のRadon変換とその応用について

東大・理　野呂正行 (*)

(Masayuki Noro)

目次

*) 現在の所属は富士通・国際研

要旨

超函数を正則函数の境界値としてとらえる，という考えは，Kataoka [8] によるRadon変換の理論によって，より明らかなものとされ，金子[3]によってさらに直観的で，わかり易いものとなった。この修論では，Kashiwara-Laurent [7] による 2-超函数を，同様に $\mathcal{CO}$(正則パラメタをもつmicrofunction)の境界値として把握することを試みる。

まずいくつかのコホモロジー消滅定理によって，Kataoka[8]と同様にして 2-超函数のコホモロジー的Radon変換が得られ，それと$\mathcal{CO}$の$\mathcal{O}$-変数に関する曲面Radon分解により 2-超函数は$\mathcal{CO}$の境界値としてかなり明確にとらえられる。これにより，2-超函数に対する種々の基本的演算が初等的に定義され，その 2-特異スペクトルの評価も得られる。これらの応用として，Kashiwara-Laurent [7] に述べられている "théorème de Holmgren microlocal" が金子[3]と全く同様にして初等的，直観的に証明される。

§1 2-microfunctions a cohomological Radon transformations

M を real analytic manifold, $\Lambda \subset \sqrt{-1}T^*M$ を homogenious involutory submanifold とする。このとき, Kashiwara-Laurent [7] によって, $\mathcal{A}^2_\Lambda$ (2-real analytic function), $\mathcal{B}^2_\Lambda$ (2-hyperfunction), $\mathcal{C}^2_\Lambda$ (2-microfunction) なる sheaves が定義されている。以下で Λ が特殊な場合において, Kataoka [8] と同様の方法で, $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ を cohomological Radon transformation によって把握することを考える。

1.0 準備

以下では次の状況で考える。

$$M = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{R}^q_x \hookrightarrow \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^q_z = X$$

($w = u+iv$, $z = x+iy$; それぞれの dual variable を $\tau = t+is$, $\zeta = \xi+i\eta$ とする)

$$N = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{C}^q_z \hookrightarrow X.$$

$$\Lambda = \{(u, x; \sqrt{-1}(t\,du + 0\,dx))\} \simeq \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \subset \sqrt{-1}T^*M$$

$$\tilde{\Lambda} = T^*_N X = \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$$

すなわち $\Lambda \hookrightarrow \tilde{\Lambda}$ で $\tilde{\Lambda}$ は Λ の部分複素化である。この状況で、$\pi : {}^N\tilde{X}^* \to X$ (${}^N\tilde{X}^*$: コモノイダル変換) とするとき、$C_{N|X} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^p_{T^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega$ は z を正則パラメタにもつ microfunction の sheaf となる。(a: antipodal map, ω: orientation sheaf. 以下支障がない限り省略する。) これを $C\mathcal{O}$ と書くとき、$\mathcal{A}^2_\Lambda$, $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ は次のように定義される。

$$\mathcal{A}^2_\Lambda = C\mathcal{O}|_\Lambda, \qquad \mathcal{B}^2_\Lambda = \mathcal{H}^q_\Lambda(C\mathcal{O})$$

$$\mathcal{C}^2_\Lambda = \mathcal{H}^q_{T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}C\mathcal{O})^a \otimes \omega \quad (\pi : {}^\Lambda\tilde{\tilde{\Lambda}}^* \to \tilde{\Lambda}).$$

以後 Λ を $\sqrt{-1}(T^*\mathbb{R}^p\setminus\mathbb{R}^p)\times\mathbb{R}^q$ に制限して考えることとし，さらにそれを $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ とみなすことにする。

1.1. 消滅定理

この節では，のちに必要となる，いくつかの cohomology 消滅定理を証明する。

1° $N=\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^l \hookrightarrow \mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^l = X$ $\quad N_0=\mathbb{R}^p\hookrightarrow\mathbb{C}^p=X_0$

このとき ${}^N\widetilde{X}^* \simeq {}^{N_0}\widetilde{X_0}^*\times\mathbb{C}^l$ $\quad {}^{N_0}\widetilde{X_0}^*=(\mathbb{C}^p\setminus\mathbb{R}^p)\sqcup\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$

$\pi: {}^N\widetilde{X}^*\to X$ とする。

定理 1 1 1 $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: open, proper convex

$D\subset\mathbb{C}^l$: Stein open

$\Longrightarrow H^j(U\times D, \mathcal{C}\mathcal{O})=0 \quad (j\geq 1)$

証明) $\mathcal{C}\mathcal{O}=\mathcal{H}^p_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)=\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O})[p]$

(純 p 余次元性) より

$$H^j(U\times D, \mathcal{C}\mathcal{O})=H^{j+p}_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$$

$(\widetilde{U}=\Omega\sqcup U\ ;\ \Omega$ open $\subset\mathbb{C}^p\setminus\mathbb{R}^p$ で $\widetilde{U}$: open in ${}^{N_0}\widetilde{X_0}^*)$

そこで次の long exact sequence を考える。

$\to H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O})\to H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O})\to H^j(\Omega\times D, \mathcal{O})\to\cdots$

まず $H^j(\Omega\times D, \mathcal{O})$ であるが，これについては次の

補題がある.

補題 1.1.2 ((c.f 小松[10], Douady [2] etc))
$X=\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$. $W\subset\mathbb{C}^p$ $D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$: open
かつ $H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$, $\dim_{\mathbb{C}} H^k(W,\mathcal{O})<+\infty$
$\Rightarrow$. $H^k(W\times D,\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})\simeq H^k(W,\mathcal{O})\otimes_{\mathbb{C}}\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$.

証明) まず, 一般に $D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$ open に対し,
$\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$ は Frechet nuclear である. よって
小松[10] etc によって, $\cdot\hat{\otimes}\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$ は,
Frechet Spaces の topological short exact
Sequence に対しては exact functor で, また一般
に left exact でもある. よって. $\mathcal{E}(U)\hat{\otimes}\mathcal{E}(V)\simeq\mathcal{E}(U\times V)$
により. (U. V. open). $\mathcal{E}(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}\mathcal{E}(D)\simeq\mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{E}(U\times D)$
$\mathcal{O}(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}\mathcal{E}(D)\simeq\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}(U\times D)$ がいえている.
さて, X上に
$0\to\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{O}\mathcal{E}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\quad\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{(0,p)}\mathcal{O}\mathcal{E}\to 0$
なる resolution (Partial Dolbeault resolution) が存
在することが上で述べたことからわかり, しかも,
$H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$ より $H^j(W\times D,\mathcal{E}^{(0,\cdot)}\mathcal{O}\mathcal{E})=0$

$(j \geq 1)$ がいえる。(これは Andreotti-Grauert [1] によってもいえるし、また以下の議論を使ってもいえる)

よって $H^j(\overline{W}\times D, \mathcal{O}\otimes\mathcal{E}) \simeq H^j(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,\cdot)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$

$= H^j(\Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,\cdot)})\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}))$

ここで次の図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & & & & & & & \\
& Z^{k-1} \arrow[dr] & & & & & & & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k-1)}) \arrow[rrrrr] \arrow[dr] & & & & & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k)}) \arrow[rr] & & \Gamma(\overline{W}, \mathcal{E}^{(0,k+1)}) \arrow[r] & \cdots \\
& & 0 \arrow[r] & B^k \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & Z^k \arrow[ur] \arrow[rr] & & H^k(\overline{W}, \mathcal{O}) \arrow[r] & 0 & \\
& & & & 0 & 0 \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

仮定より $\dim_{\mathbb{C}} H^k(\overline{W}, \mathcal{O}) < +\infty$ だから 小松[9] 定理(IV.3.49) (Schwartzの補題)により B^k は閉。

よって $0 \to Z^k\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to B^{k+1}\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to 0$

$0 \to B^k\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to Z^k\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to H^k(\overline{W}, \mathcal{O})\otimes\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \to 0$

はexact ここで

$Z^{k-1}\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \simeq \operatorname{Ker}(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k-1)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$ より

$B^k\hat{\otimes}\Gamma(D, \mathcal{O}\mathcal{E}) \simeq \operatorname{Im}(\Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k-1)}\mathcal{O}\mathcal{E}) \to \Gamma(\overline{W}\times D, \mathcal{E}^{(0,k)}\mathcal{O}\mathcal{E}))$

よって補題は示された。 //

上の補題により、$\dim_{\mathbb{C}} H^k(\Omega, \mathcal{O}) < +\infty$ ならば

$H^k(\Omega\times D, \mathcal{O}) \simeq H^k(\Omega, \mathcal{O}) \otimes \Gamma(D, \mathcal{O})$ ここで

Malgrange の定理より $k \geq p \Rightarrow H^k(\Omega, \mathcal{O}) = 0$

$\therefore j \geq p+1 \Rightarrow H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$

よって $j \geq p+1$ のとき $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ をいえばよい。

$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{L}^\cdot$ を $\mathcal{O}$ の flabby resolution とする。

このとき $0 \to \pi^{-1}\mathcal{O} \to \pi^{-1}\mathcal{L}^\cdot$ は一つの resolution であるが実は $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = 0$ $({}^\forall j \geq 1,\ {}^\forall k \geq 0)$

証明) $\to H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \to H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \to H^j(\Omega\times D, \mathcal{L}^k) \to \cdots$

なる long exact sequence に対して、$\mathcal{L}^k$ が flabby より $H^j(\Omega\times D, \mathcal{L}^k) = 0$ $(j \geq 1)$ さらに次の補題がある。

補題 (S-K-K prop 1.2.4) $N \supset M$: manifolds

$\mathcal{F}$: a sheaf on N. $U \subset S^*_M N$: open proper convex

$\pi : {}^M\widetilde{N}^* \to N$ とするとき

$H^j(U, R\Gamma_{S^*_M N}(\pi^{-1}\mathcal{F})) \simeq \varinjlim_{Z} H^j_Z(N, \mathcal{F})$ ただし

Z は 1) Z : locally closed in N. $Z \supset \pi(U)$

2) $\overline{Z - M}$ in ${}^M\widetilde{N}^* \cap U = \phi$ を満たす。

この補題により $H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \simeq \varinjlim_{Z} H^j_Z(N, \mathcal{L}^k) = 0$ $(j \geq 1)$ ($\because$ $\mathcal{L}^k$: flabby) よって $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k)$ も $j \geq 1$ で消える。 //

よって $H^j(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^j(\Gamma(\widetilde{U}\times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^{\bullet}))$

以下で右辺を調べる。

一般に $M=\mathbb{R}^m \simeq \{0\}\times\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{\ell}_x\times\mathbb{R}^m_t = N$

F : sheaf on N. $\pi: {}^M\widetilde{N}^* = ((\mathbb{R}^{\ell}\setminus\{0\})\sqcup S^{\ell-1}_{\xi})\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{R}^m$. $U\subset S^{\ell-1}_{\xi}\times\mathbb{R}^m = S^*_M N$: open. proper convex とし、$S^{\ell-1}_{\xi} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\ell}\setminus\{0\}$ （単位球面）と見なす。

このとき $\Omega\subset(\mathbb{R}^{\ell}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^m$ を

$\Omega=\{(x,t)\ ;\ \exists(\xi,t)\in U \text{ s.t. } \langle x,\xi\rangle\geq 0\}$

$= U^{aoc}$ （a: antipodal. o: polar. c: 補集合）

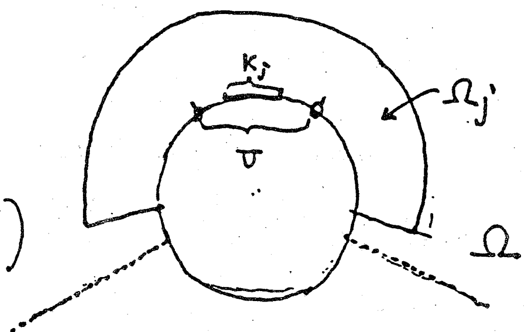
と定義する。(Ω: open in $(\mathbb{R}^{\ell}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^m$) すると、

$\widetilde{U}=\Omega\sqcup U$ は open in ${}^M\widetilde{N}^*$。U が open. proper convex より $\exists K_j$ ($j=1,2,\cdots$) compact proper convex $K_j\subset\subset K_{j+1}$ s.t. $\bigcup K_j = U$ このとき $\Omega_j\subset\Omega$ を $\Omega_j=\{(x,t)\ ;\ \exists(\xi,t)\in K_j \text{ s.t. } \langle x,\xi\rangle\geq 0.\ |x|\leq j\}$ とおくと $\widetilde{K}_j=\Omega_j\sqcup K_j$ は $\mathrm{int}\,K_j$ の近傍 in ${}^M\widetilde{N}^*$

$\widetilde{K}_j\subset \mathrm{int}\,\widetilde{K}_{j+1}$ で $\widetilde{U}=\bigcup\widetilde{K}_j$

よって、

$\Gamma(\widetilde{U},\pi^{-1}F)=\varprojlim_j \Gamma(\widetilde{K}_j,\pi^{-1}F)$



ここで

補題 $\Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}\mathcal{F}) \simeq \Gamma(\pi(\tilde{K}_j), \mathcal{F})$.

証明). まず $\tilde{K}_j$ が $\tilde{N}^*$ で compact であることを示す。

$\tilde{K}_j \subset \bigcup_\lambda \tilde{V}_\lambda$ ($\tilde{V}_\lambda$ = open in $\tilde{N}^*$) とする。$\tilde{V}_\lambda$ を細分することによって $\tilde{V}_\lambda \cap S^*_M N \neq \emptyset$ なる λ については

$\tilde{V}_\lambda = \{(x, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m ;\ |x| < \varepsilon_\lambda\ |t - t_\lambda| < \varepsilon_\lambda.\ \exists \xi \in S^{d-1}$

s.t $|\xi - \xi_\lambda| < \varepsilon_\lambda,\ \langle x, \xi \rangle \geq 0\}$

$\sqcup \{(\xi, t) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}^m,\ |\xi - \xi_\lambda| < \varepsilon_\lambda.\ |t - t_\lambda| < \varepsilon_\lambda\}$

という形をしているとしてよい。さて $K_j \subset \bigcup_\lambda (\tilde{V}_\lambda \cap S^*_M N)$ で K_j が $S^*_M N$ で compact より $\exists \lambda_1 \cdots \lambda_N$ s.t

$K_j \subset \bigcup_{i=1}^N \tilde{V}_{\lambda_i}$ $\quad \varepsilon = \min_i \varepsilon_{\lambda_i}$ とおくと.

$\tilde{K}_j \subset \bigcup_{i=1}^N \tilde{V}_{\lambda_i} \cup \{(x, t) \in \Omega_j\ \ |x| \geq \varepsilon\}$

[$\because$) $K_j \subset$ 右辺は OK。$(x, t) \in \Omega_j$, $|x| < \varepsilon$ とすると
$\exists (\xi, t) \in K_j$ s.t $\langle x, \xi \rangle \geq 0$ (Ω_j の定義)。$\exists \lambda_i$ s.t
$|\xi - \xi_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i}$ $|t - t_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i}$ で $|x| < \varepsilon \leq \varepsilon_{\lambda_i}$ より
$(x, t) \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ //]

$\{(x, t) \in \Omega_j,\ |x| \geq \varepsilon\}$ は通常の Euclid 空間の compact set より 結局 $\tilde{K}_j$ は有限個の $\tilde{V}_\lambda$ で覆われる。//

よって $p = \pi|_{\tilde{K}_j} : \tilde{K}_j \to \pi(\tilde{K}_j)$ は closed map

かつ fibre は connected。よってこのとき $\mathcal{F}\to p_*p^{-1}\mathcal{F}$ なる canonical morphism において、stalk を調べると、

$$\mathcal{F}_{p^*}\to (p_*p^{-1}\mathcal{F})_{p^*}=\varinjlim_{W\ni p^*}\Gamma(p^{-1}(W),p^{-1}\mathcal{F})$$
$$\underset{p:\text{closed map}}{\simeq}\varinjlim_{V\supset p^{-1}(p^*)}\Gamma(V,p^{-1}\mathcal{F})\xrightarrow{inj}\Gamma(p^{-1}(p^*),p^{-1}\mathcal{F})$$
$$\underset{\text{fibre connected}}{\simeq}\mathcal{F}_{p^*}$$

よって、

$$\begin{tikzcd} & (p_*p^{-1}\mathcal{F})_{p^*} \arrow[dr, "inj"] & \\ \mathcal{F}_{p^*} \arrow[ur] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Omega"] & & \mathcal{F}_{p^*} \end{tikzcd}$$

より $\mathcal{F}\simeq p_*p^{-1}\mathcal{F}$

$$\therefore\ \Gamma(\pi(\widehat{K_j}),\mathcal{F})\simeq\Gamma(p^{-1}(\pi(\widehat{K_j})),p^{-1}\mathcal{F})$$
$$=\Gamma(\widehat{K_j},\pi^{-1}\mathcal{F})\qquad //$$

はじめの状況にもどる。$\widehat{U}\times D=(\Omega\sqcup U)\times D$ において、Ω を上で述べたと同様の cone にとり、$\widehat{\Omega}_j=\Omega_j\sqcup K_j$ を、上と同様に、$\widehat{U}$ をとりつくすようにとる。さらに、D は Stein より $\exists D_j\ (j=1,2\cdots)\subset\subset D$ $D_j\subset\subset D_{j+1}$ s.t. D_j：compact な解析多面体で $D=\bigcup D_j$ すると上の補題より

$$\Gamma(\widehat{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^k)=\varprojlim_j\Gamma(\pi(\widehat{\Omega}_j)\times D_j,\mathcal{L}^k)$$

よって

$$H^k(\widehat{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})\simeq H^k(\varprojlim_j\Gamma(\pi(\widehat{\Omega}_j)\times D_j,\mathcal{L}^{\cdot}))$$

ここで次の古典的補題がある。

補題 (cf. Kashiwara [4])

$\cdots \to F_{j+1} \to F_j \to \cdots$ を complex の projective system とする。今、$\forall i$ に対し、$\{F_j^i\}$ が次の条件 (ML)

(ML) $\forall j \in \mathbb{N}$. $\{\mathrm{Im}(F_{j+\nu}^i \to F_j^i)\}_\nu$ が stationary

を満たすとする。このとき

1) canonical morphism $\phi_k : H^k(\varprojlim_j F_j^\cdot) \to \varprojlim_j H^k(F_j^\cdot)$ は onto

2) もし $\{H^k(F_j^\cdot)\}$ が (ML) を満たせば ϕ_{k+1} は isomorphism

$F_j^i = \Gamma(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{L}^i)$ とおくと、$\mathcal{L}^i$ が flabby より $\{F_j^i\}$ は (ML) を満たす。このとき $H^k(F_j^\cdot) = H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O})$ より $k \geq p$ で

$H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) = 0$ がいえれば、上の補題により $H^{k+1}(\Omega \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ $(k \geq p)$ がいえる。

$\pi(\widehat{\Omega}_j)$, D_j は compact より、

$$H^k(\pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) \simeq \varinjlim_{W_1 \times W_2 \supset \pi(\widehat{\Omega}_j) \times D_j} H^k(W_1 \times W_2, \mathcal{O})$$

ここで D_j が compact 解析的多面体より，Stein 基本近傍系が存在する。よって補題 1.1.2 により $k \geq p$ で上の cohomology 群は消える。以上で定理 1.1.1 が証明された。 //

2° 次に，正則パラメタと smooth パラメタをもつ microfunction の sheaf を定義し，その cohomology 消滅定理を述べる。

$$N = \mathbb{R}^p_u \times \mathbb{C}^q_z \times \mathbb{R}^r_t \hookrightarrow \mathbb{C}^p_w \times \mathbb{C}^q_z \times \mathbb{R}^r_t = X$$
$$N_0 = \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p = X_0 \qquad {}^N\widetilde{X}^* \simeq {}^{N_0}\widetilde{X}_0^* \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$$
$$\pi : {}^N\widetilde{X}^* \longrightarrow X \qquad \text{とする。}$$

命題 1.1.3 $\quad \mathcal{H}^k_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{E}) = 0 \quad (k \neq p)$

証明）次の定理による。

定理（abstract edge of the wedge, Kashiwara-Laurent [7]）

T: 位相空間 $\quad X$ complex manifold $\mapsto \mathcal{F}_X$: sheaf on $X \times T$ なる対応が定まっていて，$\varphi : X \to X'$ (holomorphic map) に対し，$\varphi^* : (\varphi \otimes id_T)^{-1}\mathcal{F}_{X'} \to \mathcal{F}_X$ なる代入操作

が定まっていて次の(H1)−(H3)を満たすとする。

(H1) $X\supset U\supset V\neq\emptyset$ opens U : connected $W\subset T$ open

$\Rightarrow \Gamma_{(U\setminus V)\times W}(U\times W,\mathcal{F}_X)=0$

(H2) $f : X\to\mathbb{C}$ holomorphic $Y=f^{-1}(0)$上で $df\neq 0$

$\iota : Y\hookrightarrow X$ とするとき $0\to\mathcal{F}_X\to\mathcal{F}_X\xrightarrow{\iota^*}\mathcal{F}_Y\to 0$

(H3) Y : compact complex manifold $f : X\times Y\times T\to X\times T$

$\Rightarrow R^q f_*\mathcal{F}_{X\times Y}=\mathcal{F}_X\otimes H^q(Y,\mathcal{O}_Y)$

このとき G : closed in $\mathbb{C}^n$ $x\in G$とし, xを通る$\mathbb{C}$ linear affine variety L ($\dim_{\mathbb{C}}L=n-q+1$) で$L\cap G$がL中でxの近傍になるものがないとき, $t\in T$に対し

$\mathcal{H}^k_{G\times T}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})_{(x,t)}=0$ ($\forall k<q$)

$\mathcal{F}_X=\mathcal{O}_X\,\mathcal{O}\mathcal{E}$ $T=\mathbb{C}^l\times\mathbb{R}^r$とする。すると(H1).(H2)は明らか。(H3)は、Z compact $\Rightarrow$ $\forall j$. $\dim_{\mathbb{C}}H^j(Z,\mathcal{O}_Z)<+\infty$ (Cartan) より補題1.1.2が使えてok。

$p^*\in S^*_N X$とする。 $p^*=(0,\sqrt{-1}\xi_0 du_0,0,0)$ $\xi_0=(1,0\cdots 0)$ としてよい。このとき

$\mathcal{H}^k_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})_{p^*}=\varinjlim_{\varepsilon}\mathcal{H}^k_{G_\varepsilon}(\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})_{(0,0,0)}$

ただし $G_\varepsilon=\{(w,z,t)\ \ \langle v,\xi_{\varepsilon,l}\rangle\geq 0\ \ l=1\cdots p\}$

$-\xi_0,\ \xi_{\varepsilon 1}\cdots\xi_{\varepsilon p}$の凸包が原点の近傍

この G_ε は定理で $q=p$ の場合の仮定を満たす。

よって. $k<p$ で $\mathcal{H}^k_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ また

$k>p$ のとき, $\mathcal{H}^k_{G_\varepsilon}(\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})_{(0,0,0)}=\varinjlim_{\delta} H^k_{G_\varepsilon}(U_\delta\times V_\delta\times W_\delta,\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})$

($U_\delta, V_\delta, W_\delta$: open ball) $U_\delta\times V_\delta\times W_\delta - G_\varepsilon = \bigcup_{l=1}^{p} U_l\times V_\delta\times W_\delta$

(U_l : 半空間) と書け, $\{U_\delta\times V_\delta\times W_\delta,\ U_l\times V_\delta\times W_\delta\}$ は, $\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E}$

に対する $p+1$ 枚の Leray covering より 上は消える。//

定義 $\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^p_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})$

定義 (c.f. Andreotti-Grauert [1] Kataoka [8])

$D\subset\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q$ が regular family of Stein domain とは

1) $\pi:\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ とし. $\forall x\in\pi(D)$. $\pi^{-1}(x)$ Stein

2) $\forall x\in\pi(D)$ $\exists W_x$ open in $\mathbb{C}^p$ $\exists U_x\ni x$ open in $\mathbb{R}^q$

s.t $W_x\times U_x\supset\pi^{-1}(U_x)\cap D$ かつ $(\pi^{-1}(x)\cap D,\ W_x)$ が Runge Pair

を満たすことをいう。

Andreotti-Grauert により D が regular family of Stein domain $\Rightarrow$ $H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0\ (j\geq 1)$

さらに Stein の場合と同様 $\exists Q_i\subset\subset D$

compact 解析的多面体 ($\exists U$ open $\supset Q_i$. $\exists f_1 \cdots f_N \in \mathcal{OE}(D)$ $Q_i = \{p \in U ; |f_j(p)| \leq 1\}$) $Q_i \subset\subset Q_{i+1}$ s.t $D = \bigcup Q_i$ であって, Q_i はやはり $H^j(W, \mathcal{OE}) = 0$ $(j \geq 1)$ なる基本近傍系をもつ。

定理 1.1.4 $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex
$D \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$ regular family of Stein domain
$\Rightarrow H^j(U \times D, \mathcal{COE}) = 0$ $(j \geq 1)$

証明) これは, 命題 1.1.2 と上の定義中で述べたことを用いれば 定理 1.1.1 と全く同様にいく。//

3° 最後に $p \begin{cases} \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \\ {}^{\mathbb{R}^p}\widetilde{\mathbb{C}}^{q*} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \to {}^{\mathbb{R}^p}\widetilde{\mathbb{C}}^{p*} \times \mathbb{R}^q \end{cases}$

に対し $p^{-1}\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = p^{-1}\mathcal{H}^p_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{OE})$ の cohomology 消滅定理を述べる。

定理 1.1.5 (cf. Kataoka [8] Theorem 2.1.4)
D open $\subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ $\exists W_1 \subset\subset \cdots \subset\subset D$ open in D
$\bigcup W_j = D$ s.t $\forall x \in \mathbb{R}^q$ $p^{-1}(x) \cap W_j$, $p^{-1}(x) \cap \overline{W_j}$,

$p^{-1}(x)\cap D$ が contractible. $\mathring{U}\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$ open convex fibre $\Rightarrow$ $H^k(\mathring{U}\times D, P^{-1}\mathcal{C}_\mathcal{E})=0$ $(k\geq 1)$

証明) まず, S-K-K Chapt 1 Lemma 2.2.3 より

$$P^{-1}\mathcal{C}_\mathcal{E} = P^{-1}\mathbb{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})[p]$$

$$\simeq \mathbb{R}\Gamma_{S^*_{\tilde{N}}\tilde{X}}(\pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})[p]$$

$$(\tilde{N} = \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r = \tilde{X})$$

よって $H^k(\mathring{U}\times D, P^{-1}\mathcal{C}_\mathcal{E})\simeq H^{k+p}_{\mathring{U}\times D}(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})$

$(\tilde{U}=\mathring{U}\sqcup\Omega)$ 　　次の exact sequence を考える.

$\to H^k_{\mathring{U}\times D}(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})\to H^k(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})\to H^k(\Omega\times D, P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})\to$

今. $0\to P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E}\to P^{-1}\mathcal{E}^{(0,0)}_\mathcal{E}\to\cdots\qquad\to P^{-1}\mathcal{E}^{(0,p)}_\mathcal{E}\to 0$

なる resolution において, Kataoka [8] Theorem 2.1.4

により $H^j(\Omega\times D, P^{-1}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}_\mathcal{E})=0$ $(j\geq 1)$ よって

$H^k(\Omega\times D, P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})\simeq H^k(\Gamma(\Omega\times D, P^{-1}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}_\mathcal{E}))$

P が open fibre connected より $\simeq H^k(\Gamma(\Omega\times P(D), \mathcal{E}^{(0,\cdot)}_\mathcal{E}))$

$= H^k(\Omega\times P(D), \mathcal{O}_\mathcal{E}) = 0$ $(k\geq p)$ 　よって

$k\geq p+1$ で $H^k_{\mathring{U}\times D}(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})\simeq H^k(\tilde{U}\times D, \pi^{-1}P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})$

あとは 定理 1.1.1 と同様にして. K compact $\subset\mathbb{C}^p$

のとき $H^k(K\times\overline{W_j}, P^{-1}\mathcal{O}_\mathcal{E})=0$ $(k\geq p)$ といえばよいが,

$P|_{K\times\overline{W_j}}$ が, proper, fibre contractible かつ

$K \times \overline{W}_j$ が Hausdorff より $\simeq H^k(K \times p(\overline{W}_j), \mathcal{O}\mathcal{E})$
$= 0 \quad (k \geq p)$ //

以上により、必要な消滅定理はすべて証明された。

1.2 2-microfunctions の Cohomological Radon transformations

1.1 の消滅定理を用いて. $\mathcal{B}^2_\Lambda$, $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の cohomological Radon transformation を述べる。方法その他. Kataoka [8] の全くの引き写しである。

T, S を Abelian Category $F: T \to S$ を left exact functor とする。このとき $A^j \in T$.

$0 \to A^0 \to \cdot \qquad \to A^n \to 0$ (exact)

かつ $R^kF(A^j) = 0$ $(k \neq m)$

$\Rightarrow 0 \to R^mT(A^0) \to \cdot \qquad \to R^m T(A^n) \to 0$ (exact)

これを用いていくつかの exact sequence を導く。

$N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X$ Y^r complex manifold とすると $X_1 = X \times Y$ 上に

$0 \to p^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \mathcal{O}_Y^{(1)} \xrightarrow{d} \cdot \qquad \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X \mathcal{O}_Y^{(r)} \to 0$

なる exact sequence ができる。すると $S^*_N X$, $S^*_{N_1} X_1$ $(N_1 = N \times Y)$ の $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X_1}$ に対する純余次元性と S-K-K chapt I Lemma 2.2.3 により

$0 \to p^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O} \to \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)} \to 0$

なる exact sequence ができる。

同様にして

$$0 \to C\mathcal{O}\mathcal{O} \to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \qquad \xrightarrow{\bar\partial} C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,r)} \to 0$$

また Y を smooth manifold として

$$0 \to p^{-1}C\mathcal{E} \to C\mathcal{E}\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C\mathcal{E}^{(r)} \to 0$$

$$0 \to p^{-1}C\mathcal{O} \to C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(r)} \to 0$$

等も exact となる。

さて、改めて

$$\begin{tikzcd} N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times Y \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times Y = X_1 \arrow[d] \\ N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \end{tikzcd}$$

とする。($Y = Y^r$: complex manifold)

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & p^{-1}C\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,0)} \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{O}^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & & & \\ & {} & {} & & & \end{tikzcd}$$

$D \subset \mathbb{C}^q \times Y$ を定理1.1.1, 1.1.4, 1.1.5の仮定を満たす open とし、$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ を open. propre convex とすると

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(0)}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Gamma(U \times D, C\mathcal{O}\mathcal{O}^{(r)}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(U \times D, p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,0)}) \arrow[r] & \cdots & & {} & \end{tikzcd}$$

なる可換図式は第1行 第1列をのぞいてexact
よってWeilの補題によって

$$H^k(\Gamma(U\times D, CO\mathcal{O}^{(\cdot)})) \simeq H^k(\Gamma(U\times D, p^{-1}C\mathcal{E}^{(0,\cdot)}))$$

p : open, fibre connected より $\simeq H^k(\Gamma(U\times p(D), C\mathcal{E}^{(0,\cdot)}))$

ここで定理1.1.4より $H^k(U\times p(D), C\mathcal{E}^{(0,\cdot)})=0$

$(k\geq 1)$ $\quad\therefore H^k(\Gamma(U\times D, CO\mathcal{O}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D), C\mathcal{O})$

Yがsmoothの場合も同様であって

$$0\to p^{-1}C\mathcal{O}\to CO\mathcal{E}^{(0)}\to\cdots\quad\to CO\mathcal{E}^{(t)}\to 0$$

なるresolutionにおいて.

$$H^k(\Gamma(U\times D, CO\mathcal{E}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D), C\mathcal{O})$$

これらを用いて $C\mathcal{O}$ の cohomological Radon transformation を2つ与えるが、証明はKataoka[8]と全く同じなので省略する。

1° smooth parameterをもつRadon transform

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times S^{q-1} & \xrightarrow{\ p\ } & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q=\tilde{\Lambda}\\
\tau\downarrow & & \uparrow\\
\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times S^{q-1} & \xrightarrow{\ p\ } & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\Lambda
\end{array}$$

$g:[0,\infty)\to[0,\infty)$: C^2 class. $g(0)=g'(0)=0$
$g'(x), g''(x)\geq 0$ とし,

$$D_{g,\varepsilon} = \{(p^*, z, \zeta) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times S^{q-1};\ |y| < \varepsilon$$
$$y\zeta - g(\sqrt{y^2 - (y\zeta)^2}) > 0\}$$ とし

$$\mathcal{C}\mathcal{S}^k_{g,\varepsilon} \underset{def}{=} (\pi|_{D_{g,\varepsilon}})_* (\mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)})$$
$$\mathcal{C}\mathcal{S}^k_g = \varinjlim_{\varepsilon} \mathcal{C}\mathcal{S}^k_{g,\varepsilon}$$ とおく。

このとき

定理 1.2.1 次は exact：

$$0 \to \pi^{-1}\mathcal{A}^2_\Lambda \to \mathcal{C}\mathcal{S}^0_g \to \cdots\cdots \to \mathcal{C}\mathcal{S}^{q-1}_g \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}^2_\Lambda \to 0$$
on $S^*_\Lambda\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Lambda \to P_*\mathcal{C}\mathcal{S}^0_g \to \cdots \to P_*\mathcal{C}\mathcal{S}^{q-1}_g \xrightarrow{\sigma} \mathcal{B}^2_\Lambda \to 0$$
on Λ

Remark いずれも $\mathcal{C}\mathcal{O}$ に対する ede of the wedge (Kashiwara - Laurent [7]) から出る。

$\mathcal{B}^2_\Lambda$ について、$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ を open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ を convex open とするとき $D = (V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^q) \times S^{q-1} \cap D_{g,\varepsilon}$ は 定理 1.1.1, 1.1.4, 1.1.5 の仮定を満たすから

$$H^{q-1}(\Gamma(U \times V \times S^{q-1}, \mathcal{C}\mathcal{S}_{g,\varepsilon})) \simeq H^{q-1}(U \times P(D), \mathcal{C}\mathcal{O})$$

$P(D) = (V + \sqrt{-1}\{|y| < \varepsilon\}) - \mathbb{R}^q$ より

$$\doteqdot H^{q-1}(U \times (V^{\mathbb{C}} - \mathbb{R}^q), \mathcal{C}\mathcal{O}) \quad (V^{\mathbb{C}} : V \text{の Stein 近傍})$$

$$\simeq H^q_{U\times V}(U\times V^{\mathbb{C}}, \mathcal{CO}) = \Gamma(U\times V, \mathcal{B}^2_\Lambda)\ (q\geq 2)$$

すなわち $\Gamma(U\times V, \mathcal{B}^2_\Lambda)$ の元は $\mathcal{CO}\mathcal{E}^{(q-1)}$ の global section でかけている。 $q=1$ のときは直接示せる。

2° real analytic parameter をもつ Radon transformation（平面波分解）

$N_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C}^q\ \ \zeta^2=-1.\ \ |\mathrm{Re}\,\zeta| < \varepsilon\}$

$$\begin{array}{ccccc}
(p', z, \zeta) & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q = \tilde{\Lambda} \\
\uparrow & \downarrow & & \uparrow \\
(p', x, \sqrt{-1}\frac{\eta}{|\eta|}) & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\sqrt{-1}S^{q-1} & \xrightarrow{p} & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q = \Lambda
\end{array}$$

$D_\varepsilon = \{(p', z, \zeta) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon,\ |y| < \varepsilon.$

$\mathrm{Re}\, z\zeta + \frac{1}{\varepsilon}|\zeta| < 0\ \}$

$\mathcal{CJ}^j_\varepsilon = (\tau|_{D_\varepsilon})_* \mathcal{COO}^{(j)}\quad \mathcal{CJ}^j = \varinjlim_\varepsilon \mathcal{CJ}^j_\varepsilon \subset \mathcal{C}\mathcal{A}_0^j$

に対しても次がいえる。

定理 1.2.2 次は exact

$$0 \to \pi^{-1}\mathcal{A}^2_\Lambda \to \mathcal{CJ}^0 \to \cdots \to \mathcal{CJ}^{q-1} \to \mathcal{C}_\Lambda \to 0$$

on $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Lambda \to p_* \mathcal{CJ}^0 \to \cdots \to p_* \mathcal{CJ}^{q-1} \to \mathcal{B}^2_\Lambda \to 0$$
on Λ

さて，一般に M : real analytic manifold
$\Lambda \subset \sqrt{-1}T^*M$: homogenious involutory sub manifold とするとき $\mathcal{C}_M \to \mathcal{B}^2_\Lambda$ なる canonical morphism が Kashiwara-Laurent [7] で定義されていて，injective であることが cohomological に示されている。一方で，以下で述べるように，上で述べた Radon transformation によって，$\mathcal{C}_M \to \mathcal{B}^2_\Lambda$ なる morphism が定義できる。（ただし，無責任な話ではあるが，この2つが同じ morphism であるという保証はない。）

まず $\mathcal{C}_M$ の smooth parameter をもつ Radon transformation (Kataoka [8]) により

$$\mathcal{C}_M \underset{\sigma}{\cong} \mathcal{S}_0^{p+q-1} / d_{(\eta,\zeta)} \mathcal{S}_0^{p+q-2}$$

ただし $\mathcal{S}^k_{0\,(x_0, x_0, (\eta_0, \zeta_0))} = \{ f(w, z; \eta, \zeta) \in \mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)}$ defined on $|w - x_0| < \varepsilon$, $|z - x_0| < \varepsilon$, $|(\eta, \zeta) - (\eta_0, \zeta_0)| < \varepsilon$, $\eta^2 + \zeta^2 = 1$, $|v| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, $v\eta + y\zeta > 0 \}$ --- (1)

一方 $\mathcal{B}^2_\Lambda \underset{\sigma}{\cong} p_* \mathcal{CS}_0^{q-1} / d_\zeta \, p_* \mathcal{CS}^{q-2}$

以下 $P_0=(u_0, x_0, \sqrt{-1}(\eta_0 du + \zeta_0 dx)\infty) = (0, 0, \sqrt{-1}(\eta_0 du + 0 dx)\infty) \in \Lambda$ ($\eta_0 = (1, 0 \cdots 0)$) とする。すると $f \in C_{M, p_0}$ は

$f = \sigma(F(w, z; \eta, \zeta)\, d\sigma(\eta, \zeta))$

(F: defined on (1) $d\sigma(\eta, \zeta)$: S^{p+q-1} 上の標準的体積要素) とかける。一方 $g \in \mathcal{B}^2_{\Lambda, p_0}$ は $g = \sigma(G(u; z, \zeta)\, d\sigma(\zeta))$

$G \in C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$: defined on $\{(u, \sqrt{-1}\eta du\infty, z, \zeta).$ $|u| < \varepsilon, |\eta - \eta_0| < \varepsilon, \eta^2 = 1. \; y\zeta > 0. \; |y| < \varepsilon. \; \zeta^2 = 1\}$

とかける。

今. $C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ の. smooth parameter をもつ Radon transformation を考えれば. C と同様.

$C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)} \underset{\sim}{\simeq} \mathcal{A}_0^{p-1}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)} / d_\eta \mathcal{A}_0^{p-2}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$

($\mathcal{A}_0^k\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ は単に $\mathcal{A}_0^k$ に $\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ なる parameter が入ったもの) だから, もし $H(w, \eta, z, \zeta) \in \mathcal{O}\mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{E}$ が $\{|u| < \varepsilon, |v| < \varepsilon, \eta^2 = 1 \; |\eta - \eta_0| < \varepsilon_2, v\eta > 0\}$

$\times \{|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, \zeta^2 = 1. \; y\zeta > 0\}$ ... (2)

で定義されていれば $\sigma(\sigma(H\, d\sigma(\eta))\, d\sigma(\zeta))$ は $\mathcal{B}^2_{\Lambda, p_0}$ の元を定める。

さて, $j: \mathbb{R} \times S^{p-1} \times S^{q-1} \longrightarrow S^{p+q-1}$

$(\theta, \eta, \zeta) \longmapsto (\eta\cos\theta, \zeta\sin\theta)$

とおくと $\delta>0$ を十分小にとれば

$(\eta_0,0)\in\{(\eta\cos\theta,\ \zeta\sin\theta)\ ;\ |\eta-\eta_0|<\varepsilon,\ \zeta^2=1\ \ 0\le\theta<\delta\}$

$\subset\{(\eta,\zeta)\in S^{p+q-1}.\ |(\eta,\zeta)-(\eta_0,0)|<\varepsilon\}$

で, j は $\theta\neq 0$ では同型 かつ

$$j^*d\sigma(\eta\cos\theta,\ \zeta\sin\theta)=\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta\, d\theta\wedge d\sigma(\eta)\wedge d\sigma(\zeta)$$

(Kataoka [8] Lemma 2.3.1) (符号は除く)

に注意して

$$H_\delta(w,\eta,z,\zeta)=\int_0^\delta F(w,z,\eta\cos\theta,\ \zeta\sin\theta)\cos^{p-1}\theta$$
$$\times\sin^{q-1}\theta\, d\theta$$

と定義する。すると F の定義域より H_δ は (2) で定義されているから $\sigma(\sigma(H_\delta d\sigma(\eta))\,d\sigma(\zeta))$ は B^2_{Λ,p_0} の元を定める。以下で well defined であることを言う.

1) δ によらぬこと $\delta>\delta_1>0$ とすると

$$H_\delta-H_{\delta_1}=\int_{\delta_1}^\delta F(w,z,\eta\cos\theta,\ \zeta\sin\theta)\cos^{p-1}\theta\ \sin^{q-1}\theta\, d\theta$$

は w について real までのびるから $\sigma[(H_\delta-H_{\delta_1})d\sigma(\eta)]=0$

2) 代表元によらぬこと $F\,d\sigma(\eta,\zeta)=d_{(\eta,\zeta)}\omega$ とする。$\eta_0=(1,0\cdots0)$ より S^{p+q-1} の local chart として $(\eta',\zeta)=(\eta_2\cdots\eta_p,\ \zeta_1\cdots\zeta_q)$ がとれる。

以下で $d\overset{\downarrow 2}{\xi} = d\xi_3 \wedge \cdots$ 等とかく。

$\omega = \sum_{j=2}^{p} f_j\, d\overset{\downarrow j}{\eta} \wedge d\xi + \sum_{\ell=1}^{q} g_\ell\, d\overset{\downarrow}{\eta} \wedge d\overset{\downarrow \ell}{\xi}$ とかける

よって. $\omega = f\, d\overset{\downarrow 2}{\eta} \wedge d\xi$ と $\omega = g\, d\overset{\downarrow}{\eta} \wedge d\overset{\downarrow}{\xi}$ について調べればよい。(S^{p-1} の chart も η' をとっている)

a) $\omega = f\, d\overset{\downarrow 2}{\eta} \wedge d\xi$ $\qquad j^*\omega = f \cos^{p-1}\theta \sin^{q-1}\theta$

$\times\, d\overset{\downarrow 2}{\eta} \wedge d\theta \wedge d\sigma(\xi)$ よって $j^* d\omega = d j^*\omega$

$= d_\eta (f \cos^{p-1}\theta \sin^{q-1}\theta\, d\overset{\downarrow 2}{\eta}) \wedge d\theta \wedge d\sigma(\xi)$

よって $(\int F d\theta)\, d\sigma(\eta) \in \mathrm{Im}\, d_\eta$ より) $\qquad 0$

b) $\omega = f\, d\overset{\downarrow}{\eta} \wedge d\overset{\downarrow}{\xi}$ $\qquad$ このとき

$j^*\omega = f \cos^p\theta \sin^{q-2}\theta\, d\theta \wedge d\eta' \wedge {}^{\exists}\Omega$ — A

$\quad + f \cos^{p-1}\theta \sin^{q-1}\theta\, \xi_1\, d\eta' \wedge d\sigma(\xi)$ — B

$\quad + f \cos^{p-2}\theta \sin^q\theta\, \xi_1\, d\theta \wedge {}^{\exists}\psi \wedge d\sigma(\xi)$ — C

(Ω: $q-2$ form on S^{q-1}. ψ: $p-2$ form on S^{p-1})

とかける。よって $j^* d\omega = d j^*\omega$

$= d_\xi A + d_\theta B + d_\eta C$ $\qquad$ 定義により.

$\int d_\xi A$, $\int d_\eta C$ はゼロクラスに入る。また

$\int d_\theta B \to [(f|_{\theta=\delta} \cos^{p-1}\delta \sin^{q-1}\delta\, \xi_1)\, d\eta']\, d\sigma(\xi')$ $(q>1)$

中身が ω real までのびるから $C\mathcal{O}$ の元として 0

$q=1$ の場合は直接示せる。 //

§2 $\mathcal{C}\mathcal{O}$の境界値としての2-microfunctions

この節では，まず§1の写像σの
Čech cohomologyによる表現を与える。そして
$\mathcal{C}\mathcal{O}$の$\mathcal{O}$変数に関する曲面Radon分解について述べる。それをもとに，特異性の分解
やMartineau型の楔の刃定理などが示されるが，
その際，cohomological Radon transformationとの
対応が与えられていることによって議論がsmoothとなる。
そして，それらの定理を用いて，$\mathcal{B}^2_\Lambda$上における基本的演
算が直観的に定義され，2-特異スペクトルの評価も与
えられる。また，積分も"原始的"に定義され，それが
canonicalであることも示される。最後にそれらの応用
として，"Théorème de Holmgren microlocal"（Kashiwara-Laurent [7]）のspecial caseが直観的かつ素朴に示される。

2.1 cohomological Radon transformation と Čech cohomology との対応

一般に
$$\begin{array}{ccc} X_1 = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times L & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \\ \cup & & \cup \\ N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times L & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q = N \end{array}$$
(L: smooth manifold)

$K^s \subset L$ を compact piecewise smooth oriented subset $P|_{\sqrt{-1}S^*_N X \times K}$ を P とかくとき.

$P_*(\mathcal{CO}\mathcal{E}^{(s)}|_{\sqrt{-1}S^*_N X \times K}) \longrightarrow \mathcal{CO}$ なる morphism $\int_K$ が定義される。これは. $P_*(\mathcal{CO}\mathcal{E}^{(s)}|_{\sqrt{-1}S^*_N X \times K})$ の元をまず $\mathcal{CO}$ 変数について局所化し、さらに fibre K 上で local に $\mathcal{OO}\mathcal{E}^{(s)}$ の元で代表させる。そして、その代表元の、K の各 smooth piece (のさらに細分) への pull back の積分の和として $\int_K$ を定義すれば、これは K の分割 および $\mathcal{OO}\mathcal{E}^{(s)}$ の元のとり方によらずに定まる。よって、この $\int_K$ に関して Stokes の定理が成立することは K の分割において $\mathcal{OO}\mathcal{E}$ の Stokes の定理に帰着されることより OK である。

さらに Z^r: complex manifold $K^s \subset Z$

(S: real dim) とするとき $\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}_Z^{(s)} \to \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}_{Z_R}^{(s)}$ により $p_*(\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}_Z^{(s)}|_{S_N^* X \times K}) \to \mathcal{C}\mathcal{O}$ も定義され poincare の定理 ($K \subset \mathbb{C}^r$: real $r+1$ dim piecewise ~~smooth~~ orie ted compact $F \in p_*(\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}|_{S_N X \times K})$ のとき $\int_{\partial K} F dz = 0$). 特に Cauchy の積分定理 積分公式も成立する。

さて, B^2_Δ の Čech cohomology による表現と Radon transform による表現との対応を与える。一般に resolution による cohomology と Čech cohomology, あるいは 2つの resolution による cohomology の間の canonical な対応は Weil の補題において与えられている。

$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ convex

$D = \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^q \times S^{q-1} \quad |x| \in V, \ |y| < \varepsilon$

$\quad y\zeta - g(\sqrt{y^2 - (y\zeta)^2}) > 0 \}$

$\pi(D) = \{ z ; \ |x| \in V, |y| < \varepsilon \} - \mathbb{R}^q$

とするとき §1より $H^{q-1}(\Gamma(U \times D, \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)}))$

$\simeq H^{q-1}(U \times \pi(D), \mathcal{C}\mathcal{O})$ であるが この同型は次で与えられる。

$d_3 \downarrow \xrightarrow{\bar\partial}$

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{exact}}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & C\mathcal{O}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})) & \to & C\mathcal{E}^{(0,0)}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})) & \to \cdots \\ & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \\ 0 \to & C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)}(\mathbb{U}\times\mathbb{D}) & \to & \cdots\cdots & \\ & \downarrow & & & \end{array}$$

exact

により $C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}(\mathbb{U}\times\mathbb{D})$　$C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(q-2)}(\mathbb{U}\times\mathbb{D})$　$\mathrm{Ker}\left(C\mathcal{E}^{(0,q-1)}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})) \to C\mathcal{E}^{(0,q)}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D}))\right)$

$\searrow C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(q-1)}(\mathbb{U}\times\mathbb{D})$　$\searrow \cdots \searrow$　$C\mathcal{E}^{(0,q-1)}\mathcal{E}^{(0)}(\mathbb{U}\times\mathbb{D})$

$\varphi = \varphi_{q-1} \searrow \varphi_{q-1}' = d_3\varphi_{q-2} \overset{d}{\swarrow} \varphi_{q-2} \overset{\bar\partial}{\searrow} \cdots \searrow \bar\partial\varphi_0 = \varphi_{-1} \swarrow \varphi_{-1}$

なる sequence $\{\varphi = \varphi_{q-1} \cdots \varphi_{-1}\}$ において

$[\varphi] \longmapsto [\varphi_{-1}]$ として定義される。

一方 $\xi_1 \cdots \xi_q \in \mathbb{R}^q\setminus\{0\}$ を一次独立な単位ベクトルとし、$\xi_{j\pm} = \pm\xi_j$ とおくとき、

$\mathbb{V}_{j\pm} \underset{\mathrm{def}}{=} \{z \in \pi(\mathbb{D})\,;\ y\xi_{j\pm} - g(\sqrt{y^2 - (y\xi_{j\pm})^2}) > 0\}$

とおくと $\mathcal{U} = \{\mathbb{U}\times\mathbb{V}_{j\pm}\}$ は ε 十分小のとき

$\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})$ の, $C\mathcal{O}$ に対する Leray covering となる。

よって $H^{q-1}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D}), C\mathcal{O}) \simeq H^{q-1}(C^\cdot(\mathcal{U}, C\mathcal{O}))$

この同型は次で与えられる:

$f\downarrow \xrightarrow{\bar\partial}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & C\mathcal{O}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})) & \to & C\mathcal{E}^{(0,0)}(\mathbb{U}\times\pi(\mathbb{D})) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & C^0(\mathcal{U}, C\mathcal{O}) & \to & C^0(\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) & \to \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

exact

により
$$
\begin{array}{ccccccc}
C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & & C^{q-2}(\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) & & & & \mathrm{Ker}\,(C\mathcal{E}^{(0,q-1)}(\mathbb{D}\times\pi(\mathbb{D})) \to C\mathcal{E}^{(0,q)}(\mathbb{D}\times\pi(\mathbb{D}))) \\
& \searrow \quad \swarrow & & \searrow & & \searrow \quad \swarrow & \\
& C^{q-1}(\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) & & \cdots & & C^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{(0,q-1)}) &
\end{array}
$$
$$
\psi = \psi_{q-1} \searrow \psi_{q-1} = \delta\psi_{q-2} \overset{\delta}{\swarrow} \psi_{q-2} \overset{\bar\partial}{\searrow} \cdots \overset{\bar\partial}{\searrow} \bar\partial\psi_0 = \psi_{-1} \swarrow \psi_{-1}
$$
なる sequence $\{\psi = \psi_{q-1} \cdots \psi_{-1}\}$ により
$[\psi_{-1}] \longmapsto [\psi]$ で定義される。おてこの2つの
morphism の合成により
$$h : H^{q-1}(\Gamma(\mathbb{D}\times\mathbb{D}, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)})) \simeq H^{q-1}(C^{\cdot}(\mathcal{U}, C\mathcal{O}))$$
なる同型が得られるが、それは次で与えられる。

命題 2.1.1 $\Delta^k_t = \{(t_1 \cdots t_k) \mid 0 \leq t_j \leq 1,\ \sum t_j \leq 1\}$
を k 次元単体、$\{e_1 \cdots e_{k+1}\}$ をその頂点とする。
写像 $[\zeta_{j_1\varepsilon_1} \cdots \zeta_{j_{k+1}\varepsilon_{k+1}}] : \Delta^k \to S^{q-1}$ $(j_1 < \cdots < j_{k+1},\ \varepsilon_\ell = \pm 1)$
を $[\cdots](e_\ell) = \varepsilon_\ell \zeta_{j_\ell}$ を満たす "linear" な
map とし、一般に φ を S^{q-1} 上の k-form とするとき
$\int_{[\ ]} \varphi \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\Delta^k} [\ ]^* \varphi(t_1 \cdots t_k)$ と定義する。
このとき $\varphi \in \Gamma(\mathbb{D}\times\mathbb{D}, C\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)})$ に対し
$h([\varphi]) = [\{\psi_{1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q}\}]$ ただし
$$\psi_{1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q} = \int_{[\zeta_1\varepsilon_1 \cdots \zeta_q\varepsilon_q]} \varphi$$

証明) $\{\varphi = \varphi_{q-1} \cdots \varphi_{-1}\}$ なる sequence を

φから作ったとき, $\exists\, \psi_{q-2} \cdots \psi_0.\ \psi_k \in C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{CE}^{(0,q-2-k)})$

s.t. $\delta\psi_{q-2} = \varphi.\ \bar\partial\psi_0 = \varphi_{-1}.\ \delta\psi_k = \bar\partial\psi_{k+1}$

をいえばよい。ψ_k を $\psi_k(j_1\varepsilon_1 \cdots j_{k+1}\varepsilon_{k+1}) = \int_{[\cdots]} \varphi_k$

で定義する。このとき

$$(\delta\psi_{k-1})(j_1\varepsilon_1 \cdots j_{k+1}\varepsilon_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_{[j_1\varepsilon_1 \cdots \overset{\vee}{i} \cdots]} \varphi_{k-1}$$

$$= \int_{[j_1\varepsilon_1 \cdots]} d_z \varphi_{k-1} \quad (\text{Stokes})$$

（上の定義では向きづけをきちんと言っていないので厳密ではないが, 符号のみの差なので無視できる）

$$= \int_{[\ ]} \bar\partial\varphi_k = \bar\partial\psi_k(j_1\varepsilon_1 \cdots) \quad \text{両端でもOK}$$

よってこの$\psi_\cdot$ は確かに条件をみたす。 //

逆の対応は次の節で与えることとして, 境界値作用素について述べておく。

$\tau : \widetilde{\tilde\Lambda}^{\Lambda} = (\tilde\Lambda - \Lambda) \sqcup S_\Lambda\tilde\Lambda \to \tilde\Lambda$ を real monoidal transform $j : \tilde\Lambda - \Lambda \hookrightarrow \widetilde{\tilde\Lambda}^{\Lambda}$ とする.

$\tilde{a}^{2}_{\Lambda} = j_*(\mathcal{CO}|_{\tilde\Lambda-\Lambda})|_{S_\Lambda\tilde\Lambda}$

$D_\Lambda\tilde\Lambda = \{(p, x, \sqrt{-1}v, \sqrt{-1}\xi) \in S_\Lambda\tilde\Lambda \underset{\Lambda}{\times} S^*_\Lambda\tilde\Lambda ; \langle v, \xi\rangle \le 0\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & D_\Lambda\tilde\Lambda \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ S_\Lambda\tilde\Lambda \arrow[dr, "\tau"'] & & S^*_\Lambda\tilde\Lambda \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd}$$

とするとき次の exact sequence がある。

(Kashiwara-Laurent[7] に述べられているが, $\mathcal{CO}$ の

cohomology 消滅定理の証明が不充分と思われるので，
完全でないと思われる。）

$$0 \to \tilde{\mathcal{A}}^2 \xrightarrow{b} \tau_* \mathcal{B}^2 \to \pi_* \tau^{-1} \mathcal{C}^2 \to 0$$

bが境界値作用素である。bのČech cohomology
による表現は森本[1]，金子[3]により次で
与えられている。（いずれも，それがbのcanonical
な定義と一致することは証明されていない。しかし
森本[1]では単射性は示されている。）
今，$\mathbb{R}^q$の向きを一つきめる。$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: proper convex
V open $\subset \mathbb{R}^q$，Γ : proper convex cone，$V^{\mathbb{C}}$: Stein近傍
of V とし，$\varphi \in C\mathcal{O}(U \times ((\mathbb{R}^q + i\Gamma) \cap V^{\mathbb{C}}))$
とし，$\xi_1 \cdots \xi_q \in S^{q-1}$ を，一次独立かつ
$\{\xi_1\}^\circ \cap \cdots \cap \{\xi_q\}^\circ \subset \Gamma$ かつ $\{\xi_1 \cdots \xi_q\}$の向きが
S^{q-1}の正の向きであるとする。
$\mathcal{U}$ = 前の$\mathcal{U} \cap (U \times V^{\mathbb{C}})$ とおくと，φの$H^{q-1}(C^\cdot(\mathcal{U}, C\mathcal{O}))$
における image $\psi = \{\psi_{\pm\xi_1 \cdots \pm\xi_q}\}$は，
$\psi_{1+ \cdots q+} = \varphi$ その他 0 で与えられる。
そして $\Gamma(U \times V, \mathcal{B}^2_\Delta) = \{\sum_{j=1}^{N} b(\varphi_j)$; $\varphi_j \in C\mathcal{O}((U \times$
$(V + i\Gamma_j))0)$; $(U \times (V + i\Gamma_j))0$: $U \times V$上の
Γ_j型の無限小楔$\}$

と書けていて、 $\varphi_j \in \mathcal{O}((U_j \times (V_j + i\Gamma_j))^\circ)$ $(j=1,2)$.

のとき　$b(\varphi_1)+b(\varphi_2)=b(\varphi_1+\varphi_2)$　($\Gamma_1\cap\Gamma_2 \neq \phi$ のとき)

$\varphi_1+\varphi_2 \in \mathcal{O}((U_1\cap U_2 \times (V_1\cap V_2 + i\Gamma_1\cap\Gamma_2))^\circ)$

が成立する。

2.2 $C\mathcal{O}$ の $\mathcal{O}$-変数に関する曲面Radon分解

$C\mathcal{O}$ を, microfunction parameter をもつ holomorphic function とみて Kataoka [8] 金子 [3] に従って $\mathcal{O}$-変数に関する曲面 Radon 分解を与える。内容は金子 [3] と全く同じであるが, 極限論法が使えない等の点で多少注意を要する。

$\mathbb{C}^q$上の曲面Radon分解核 $W(z,\zeta)$ ($(z,\zeta)\in\mathbb{C}^q\times N_\varepsilon$, $N_\varepsilon=\{\zeta\in\mathbb{C}^q,\ \zeta^2=1,\ |\eta|=|\mathrm{Im}\,\zeta|<\varepsilon\}$) を考える:

$$W(z,\zeta)=\frac{(q-1)!}{(-2\pi i)^q}\,\frac{(1-iz\zeta)^{q-1}-(1-iz\zeta)^{q-2}(z^2-(z\zeta)^2)}{\{z\zeta+i(z^2-(z\zeta)^2)\}^q}$$

$W(z,\zeta)$ の正則域について次がいえる。

1) $D_1\subset\subset D_0$ (相対compact) とするとき $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\forall z_0\in\partial D_0+iB_\varepsilon$ (B_ε : ε-ball), $W(z-z_0,\zeta)$ は $(D_1+iB_\varepsilon)\times N_\varepsilon$ で holomorphic

2) $\tilde{D}\subset\mathbb{C}^q$ が有界 $\Rightarrow$ $\exists K>0$, $W(z,\zeta)$ は $\{(z,\zeta)\in\tilde{D}\times N_\varepsilon,\ f(y,\zeta)\underset{\mathrm{def}}{=}y\zeta-(y^2-(y\zeta)^2)>K|\eta|\}$ で holomorphic

命題2.2.1 (Kataoka [8], 金子[3])

$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open　D_1, D_0, ε は上で述べたものとする。

$D \supset\supset D_0$, Γ : open convex cone in $\mathbb{R}^2$ とし、

$f(p^*, z) \in C\mathcal{O}(U \times D_{\Gamma_{\varepsilon'}})$ $(D_{\Gamma_{\varepsilon'}} = D + i\Gamma \cap B_{\varepsilon'}$; $\varepsilon' > \varepsilon)$ とする。このとき $a \in \Gamma \cap B_\varepsilon$ とすれば

$F(p^*, z, \zeta) = \int_{D_0 + ia} f(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw$

$\in C\mathcal{O}\mathcal{O}(\widetilde{E})$

ただし $\widetilde{E}$ は　$E \underset{\mathrm{def}}{=} U \times \bigcup_{y_0 \in B_\varepsilon \cap \Gamma} E_{y_0}$ $(E_{y_0} = \{(z,\zeta) \in (D_1 + iB_\varepsilon) \times S^{q-1}_\zeta,\ g(y - y_0, \zeta) > 0\})$ のある近傍

そして、Δ° : proper convex $\subset S^{q-1}$ とするとき

$F(p^*, z, \zeta) \in C\mathcal{O}\mathcal{O}(U \times (K + i(\Gamma + \Delta)^\circ) \times \Delta^\circ)$ で

とくに $F(p^*, z, \zeta) \in C\mathcal{O}\mathcal{O}(U \times D_{\Gamma_\varepsilon} \times S^{q-1})$.

$U \times D_{\Gamma_\varepsilon}$ 上　$\int_{S^{q-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = f(p^*, z)$

証明) $\forall y_0 \in \Gamma \cap B_\varepsilon$ に対し、積分路 γ_{y_0} を

「∂D_0 上で $ia \to iy_0$, $\mathrm{int}\, D_0$ 上で $w + iy_0$」と定める。

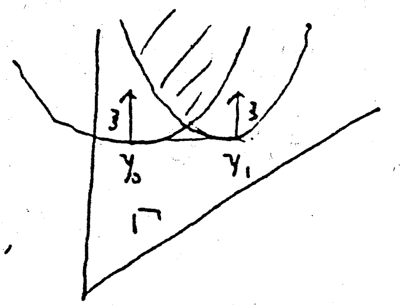
$F_{y_0}(p^*, z, \zeta) = \int_{\gamma_{y_0}} f(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw$　とおくと

1), 2) より　F_{y_0} は

$U \times \widetilde{E}_{y_0}$ $(\widetilde{E}_{y_0} = \{(z,\zeta) \in (D_1 + iB_\varepsilon) \times N_\varepsilon,\ f(y - y_0, \zeta) > k|\eta|\})$

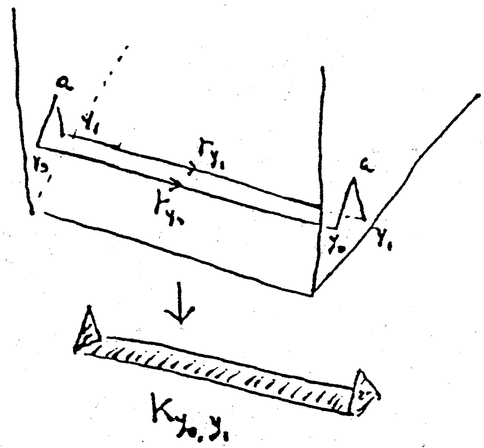
上の $C\mathcal{O}\mathcal{O}$ の元

ここで $\zeta \in S^{l-1}$ (i.e. $|\zeta|=1$, $\eta=0$) のとき $-f(y,\zeta)$ は
y の convex function より



$$E_{y_0}\cap E_{y_1} = \bigcap_{0\le t\le 1} E_{ty_0+(1-t)y_1}$$

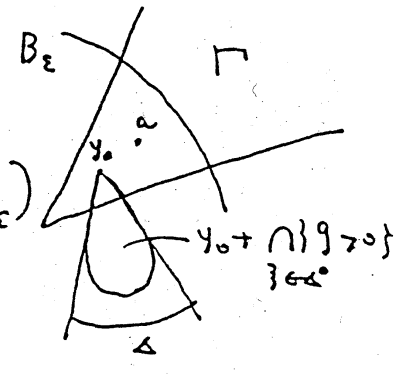
よって 実 $l+1$ 次元の積分路 K_{y_0,y_1}
を図のようにとるとき, $\forall (z,\zeta)\in E_{y_0}\cap E_{y_1}$,
$\exists V$ open $\subset \bigcap_{0\le t\le 1} \overset{\circ}{E}_{ty_0+(1-t)y_1}$ s.t.
$U\times K_{y_0,y_1}\times V$ 上で integrand
が defined. よって K_{y_0,y_1} 上で
poincaréの定理を適用して



$$F_{y_0}=F_{y_1} \text{ on } U\times(E_{y_0}\cap E_{y_1})$$

よって第1の主張は OK

次に, F_{y_0} において. ζ が Δ を動くとき, F_{y_0} は
$U\times(D_1+i(y_0+\bigcap_{\zeta\in\Delta}\{f(y,\zeta)>0\}))\times\Delta$ で定義されている。y_0 を $\Gamma\cap B_\varepsilon$ で動かすと
2番目の主張がわかる。



3番目の主張については, 左辺 $\in \mathcal{O}(U\times D_{1\Gamma_\varepsilon})$
はわかっているから, $U\times D_{1\Gamma_\varepsilon}$ 上 local
に 左辺が $f(P^*, z)$ と等しいことを
言えばよい。

$(P_0^*, z_0)=((x_0, \sqrt{-1}\zeta_0 dx\infty), z_0)\in U\times D_{1\Gamma_\varepsilon}$ を fix する。

$\exists\, U_0 = \{(x, \text{Asdt}\infty),\ |t-t_0|<\varepsilon, |s-s_0|<\varepsilon\} \ni p_0^*$

$\exists\, W_0 = V_0 + iI_0 = \{|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon\}$

$\exists$ 楔 on $\{|t-t_0|<\varepsilon\}$ $\exists F(\tau, z) \in \mathcal{O}($楔$\times W_0)$

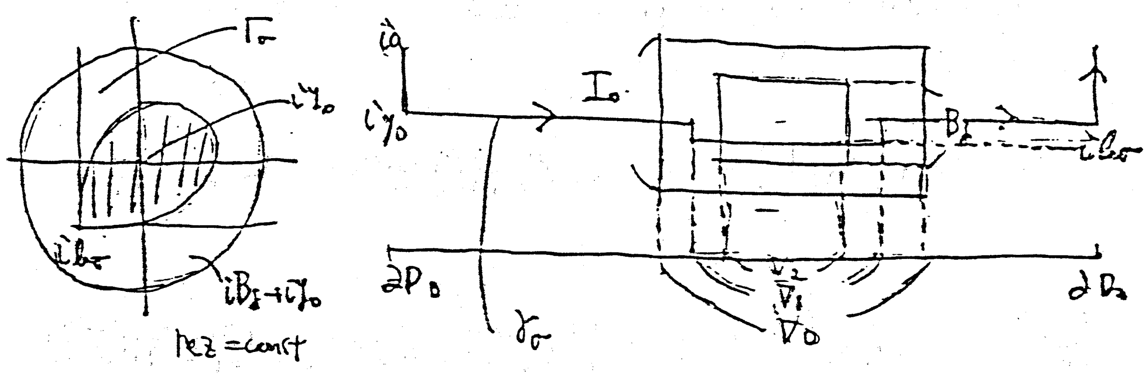
s.t. $u(p^*, z) = \mathrm{sp}[F(\tau, z)]$

$V_2 \subset\subset V_1 \subset\subset V_0$ とすると、1)と同様にして、$\exists \delta > 0$ s.t.

$^\forall w_0 \in \partial V_1 + B_\delta + iy_0$. $W(z-w_0, \zeta)$ は $(V_2 + iB_\delta + iy_0) \times N_\delta$

で holomorphic。$\sigma = (\pm 1 \cdots \pm 1)$ $b_\sigma = y_0 - \rho\sigma$ $|\rho\sigma| < \delta$

とおき、図のように積分路をきめる。



すると、ζ が $\Gamma_\sigma = \{\sigma_i \zeta_i \geq 0\}$ を動くとき z は $V_2 + i$(斜線部)

(上図)を動ける。ρ 十分小 $\Rightarrow \bigcap_\sigma$(斜線部) $\supset {}^\exists I_1 \ni y_0$

あって $U_0 \times (V_2 + iI_1)$ 上

$$\int_{S^{n-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

$$= \sum_\sigma \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma} dw\, u(p^*, w)\, W(z-w, \zeta)$$

$\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^1 \sqcup \gamma^2$ (γ_σ^1: $\overline{V_1}$ 上のもの. γ^2: のこり(共通))

とおくと、

$$= \sum_{\sigma} \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma^1} dw\, u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \cdots (1)$$

$$+ \sum_{\sigma} \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma^2} dw\, u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \cdots (2)$$

$$(1) = sp\left[\sum_{\sigma} \int_{\Gamma_\sigma} d\sigma(\zeta) \int_{\gamma_\sigma^1} dw\, F(\tau, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta) \right]$$

これは通常の holomorphic function の Radon 分解により

$$= sp\,[F(\tau, z)] \text{ on } U_0 \times (V_2 + iI_1)$$

また $(2) = \int_{\gamma^2} dw\, u(p^*, w) \int_{S^{q-1}} d\sigma(\zeta)\overline{W}(z-w, \zeta)$ で

$z-w \neq 0$ より $\int_{S^{q-1}} \overline{W}(z-w, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0 \quad \therefore (2) = 0$

$\therefore$ $U_0 \times (V_2 + iI_1)$ 上で ok. より結局全体で ok。 //

系1. $\Delta \subset\subset \Gamma$ とすると $F(p^*, z, \Delta^\circ) = \int_{\Delta^\circ \cap S^{q-1}} F(p^*, z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$ $\in \mathcal{O}(U \times (K + i\Delta 0))$ とおけば

$u(p^*, z) - F(p^*, z, \Delta^\circ)$ は $U \times K$ 上 z-real analytic

系2 $\tilde{\mathcal{C}}^2 \longrightarrow \tau^{-1}\left(P_* \mathcal{C}^{q-1} \big/ d_3 P_* \mathcal{C}^{q-2}\right) \simeq \tau^{-1}\mathcal{B}^2$

は上の特分 $u(p^*, z) \longmapsto \left[\int_{P+ia} u(p^*, w)\, \overline{W}(z-w, \zeta)\, dw\, d\sigma(\zeta) \right]$

で与えられる。

系1は 金子[3]と同じ。 系2は 命題中の
反転公式と、前に与えた Radon transformation と
Čech cohomology の対応、および 境界値作用素
b の表現を組み合わせればわかる。

命題2.2.2 $F(p^*, z) \in \mathcal{O}((U \times (V + i\Gamma))_0)$

に対し，$b(F) = b_\Gamma(F) = F(p^*, x + i\Gamma_0)$ とおく

$u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$

に対し．$(p_0^*, x_0, \sqrt{-1}\xi_0 dx\infty) \notin S\,S^2(u)$．

$\Longleftrightarrow F(z, \xi) = \sum_j \int_{V_0 + ia_j} F_j(p^*, w) W(z - w, \xi) dw$

$\in \mathcal{A}^2(p_0^*, x_0, \xi_0)$ （$a_j \in \Gamma_j$，十分小 $V_0 \subset\subset V$）

証明）$\Leftarrow$）$u(p^*, x) = \sigma(F(z, \xi) d\sigma(\xi))$

で，$\mathcal{COE}^{(\cdot)}$ に対する de Rham の定理より

$\exists\, w \in \mathcal{COE}^{(S-2)}_{(p_0^*, x_0, \xi_0)}$ s.t. $F d\sigma(\xi) = dw$

よって $sp(u) = \sigma(dw) = 0$ at $(p_0^*, x_0, \sqrt{-1}\xi_0 dx\infty)$

$\Rightarrow$）$G_j(p^*, z, \xi) = \int_{V_0 + \sqrt{-1}a_j} F_j(p^*, w) W(z - w, \xi) dw$

とおくと $F_j(p^*, z) = \int_{S^{n-1}} G_j(p^*, z, \xi) d\sigma(\xi)$

on $U \times (V_1 + i\Gamma_{j0})$ （$V_1 \subset\subset V_0$）

よって $F(z, \xi) \equiv \sum_j \int_{V_2 + i b_j} dw \left(\int_{S^{n-1}} G_j d\sigma \right) W(z - w, \xi)$

$(\bmod\ \mathcal{A}^2)$ （$V_2 \subset\subset V_1$）

（ $\int_{S^{n-1}} G_j d\sigma$ の定義域に合わせて b_j を十分小にし，

V_0 を V_2 にちぢめた。剰余が $V_3 \subset\subset V_2$ 上 $\mathcal{A}^2$ になる

ことは明らかである．）

今 $(P_0^*, t_0, i\zeta_0 d\tau_\infty) \notin S.S^2 u$ より $\exists w \in C\mathcal{O}\varepsilon^{(s-2)}(\overset{z}{\tilde{U}_0} \times \overset{z}{D})$

$D = \{|z - x_0| < \varepsilon,\ |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon,\ y\zeta - \sqrt{y^2 - (y\zeta)^2} > 0\}$

s.t. $F d\sigma = dw$

$V_4 \subset\subset V_3$ を十分小にとって $V_4 \subset\subset \{|x - x_0| < \varepsilon\}$

ととる。これに対応して積分域，水準を小にして

$$F(z, \zeta) \equiv \sum_{j, k \geq 1} \int_{V_4 + ib'_j} dw \left(\int_{\Delta_k^\circ} G_j d\sigma\right) \overline{W}$$

$$+ \sum_j \int_{V_4 + ib'_j} dw \left(\int_{\Delta_0^\circ} G_j d\sigma\right) \overline{W}$$

$\left(\Delta_0^\circ \subset\subset \{|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon\}.\ S^{n-1} \setminus \Delta_0^\circ = \bigsqcup_{i=1}^{N} \Delta_i^\circ\right.$ と polygonに分解$\left.\right)$

$\int_{\Delta_k^\circ} G_j \in C\mathcal{O}(U \times (V_1 \times i(\Gamma_j + \Delta_k)0))$ より

$b_j' \to c_k \in \Delta_k$ に変更できる。$(\mathrm{mod}\ a^2)$

よって $\equiv \sum_k \int_{V_4 + ic_k} dw\, \overline{W} \int_{\Delta_k^\circ} F(z, \zeta) d\sigma$

$+ \int_{V_4 + ic_0} dw\, \overline{W} \int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma$

$k \geq 1$ なら $\int_{\Delta_k^\circ} F d\sigma \in C\mathcal{O}(U \times (V_1\ \ i\Delta_k)0)$

でかつ $c_k \in \Delta_k^\circ$ より $\int_{V_4 + ic_k} \overline{W} dw \int_{\Delta_k^\circ} F d\sigma \in a^2$

また $\int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma = \int_{\Delta_0^\circ} dw = \int_{\partial\Delta_0^\circ} w = \sum_\ell \int_{B_\ell^\circ} w$

$(\bigcup B_\ell^\circ = \partial\Delta_0^\circ)$ で $\int_{B_\ell^\circ} w \in C\mathcal{O}(U_0 \times (\{|z - x_0| < \varepsilon\} + iB_\ell 0))$

$B_\ell^\circ \ni c_0$ よって $\int_{V_4 + ic_0} \overline{W} \int_{B_\ell^\circ} w \in a^2$

$\therefore \int_{\Delta_0^\circ} F d\sigma$ も so //

これらを使えば金子[3]にある基本的な命題（に相当するもの）が証明できる。それらを列挙する。
（証明は略）

定理 2.2.3 $f(p^*, x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$; $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$
propre convex V open in $\mathbb{R}^q$ $V_0 \subset\subset V$ $U_0 \subset\subset U$
$S.S^2 f \subset U \times V \times \sqrt{-1}\,\mathrm{int}\left(\bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j^\circ\right) dx\infty$
とすると $\exists F_j \in \mathcal{O}(U_0 \times (V_0 + i\Gamma_j)_0)$
s.t. $f = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$

定理 2.2.4 (Martineau 型の局所楔の刃定理)
$f = \sum b_{\Gamma_j}(F_j) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$
$f = 0$ on $U \times V$ とする。このとき $U_0 \subset\subset U$, $V_0 \subset\subset V$
$\Delta_{jk} \subset\subset \Gamma_j + \Gamma_k$ とするとき
$\exists H_{jk} \in \mathcal{O}(U_0 \times (V_0 + i\Delta_{jk})_0)$ s.t.
$H_{jk} = -H_{kj}$ で $F_j = \sum_k H_{jk}$

2.3 $\mathcal{B}^2_\Lambda$に対する基本的演算とその応用

2.2の定理によって hyperfunction の場合と同様に制限, 代入が定義でき, また, 2-hyperfunction と hyperfunction の積が定義できる。また, 積分が定義できる。これらの演算は Kashiwara-Laurent [7] で canonical (cohomological) に定義されているものであって, これらが一致するという保証はよく証明を要することであるが, ここでは行わない。

1° 積

定理 2.3.1

$$\begin{tikzcd} S^*_\Lambda\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \arrow[d] \\ \Lambda = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \arrow[r, "p"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

$u(p^*, x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$ $\quad v(x) \in \mathcal{B}(V)$

とし $SS^2 u \cap p^{-1}((SSv)^a) = \phi$

$\Rightarrow$ 積 $u(p^*, x)\, v(x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$ が定義され

1) $\mathrm{supp}\, uv \subset \mathrm{supp}\, u \cap p^{-1}(\mathrm{supp}\, v)$

2) $SS^2 uv \subset \{(p^*, x, (\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)\, dx\infty)\ ;$

$(p^*, x, \xi\, dx\infty) \in SS^2 u,\ (x, \eta\, dx\infty) \in SSv\ \ 0 \le \lambda \le 1\}$

$\cup\ SS^2 u\ \cup\ p^{-1}(SSv)$

証明は hyperfunction の場合と同じである。すなわち定理 2、2、3 によって local に singularity を分解して積を local に定義でき，定理 2、2、4 および hyperfunction に対する局所楔の刃定理によって local に unique に定義できていることがわかる。
SS^2 の評価も同様にして得られる。

2° 制限，代入

$f: N \to M$ real analytic manifold の間の real analytic map とする

$$\begin{array}{ccccc} & & N \underset{M}{\times} \sqrt{-1}S^*M - \sqrt{-1}S^*_N M & & \\ & \overset{\rho}{\swarrow} & & \overset{\varpi}{\searrow} & \\ \sqrt{-1}S^*N & & & & \sqrt{-1}S^*M \end{array}$$

を canonical map とする。

定理 2、3、2.

1) f: embedding (制限)

map を $\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \cdots$ に拡張しておく

$u \in \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times M}$ が $SS^2 u \cap \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*_N M = \phi$ なるとき $u|_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N} \in \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N}$ が定義できて

$$SS^2(u|_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N}) \subset \rho\varpi^{-1}(SS^2 u)$$
$$= \rho(\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times N \underset{M}{\times} \sqrt{-1}S^*M \cap SS^2 u)$$

2) f: smooth (代入)

$$f^* : f^{-1}\mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times M} \longrightarrow \mathcal{B}^2_{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times N}$$

なる代入が定義され.

$$SS^2(f^*u) = \rho\,\varpi^{-1}(SS^2 u)$$

これも hyperfunction の場合と同様である。

3° 積分

$$\begin{array}{ccc} N_1 = \mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q\times\mathbb{C}^r\times\overline{\mathbb{C}}^r = X_1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ N = \mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q & \hookrightarrow & \mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q = X \end{array}$$

($\mathbb{C}^q \simeq \mathbb{C}^q\times_{\mathbb{C}^q}\overline{\mathbb{C}}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^q\times\overline{\mathbb{C}}^q = \mathbb{C}^q$の複素化 etc)

$$\tilde{\Lambda}_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r \xrightarrow{p} \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q = \tilde{\Lambda}$$

このとき $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}$ 上に次の exact sequence (flabby resolution) が存在する。

$$0\to \mathcal{CO}^{(r)} \to \mathcal{C}^{(0,0)(r)}_{N_1}\Big|_{\tilde{\Lambda}_1} \to \cdots \to \mathcal{C}^{(0,q+r)(r)}_{N_1}\Big|_{\tilde{\Lambda}_1} \to 0$$

$$0\to \mathcal{CO} \to \mathcal{C}^{(0,0)}_{N}\Big|_{\tilde{\Lambda}} \to \cdots \to \mathcal{C}^{(0,q)}_{N}\Big|_{\tilde{\Lambda}} \to 0$$

ここで $\mathcal{CO}^{(r)} = \mathcal{CO}\otimes\Omega^r_{\mathbb{C}^r}$ ($\Omega^r_{\mathbb{C}^r}$: r次正則型式)

$\mathcal{C}^{(0,k)(r)}_{N_1} = \mathcal{C}_{N_1}\otimes\Omega^r_{\mathbb{C}^r}\otimes\Omega^{(0,k)}_{\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r}$ ($\Omega^{(0,k)}_{\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^r}$: k次反正則型式)

今 $Z\subset\widetilde{\Delta}_1$ closed かつ $p|_Z$ proper

$p(Z)\subset G$ closed in $\widetilde{\Delta}$ とすると

$$\Gamma_Z(\widetilde{\Delta}_1, C_{N_1}^{(0,k+r)(r)}|_{\widetilde{\Delta}_1}) \xrightarrow{\int_{\mathbb{C}^r}} \Gamma_G(\widetilde{\Delta}, C_N^{(0,k)}|_{\widetilde{\Delta}})$$

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=k+r} u_{\alpha\beta}(p^*z, t)\,d\bar{z}^\alpha\wedge d\bar{t}^\beta\wedge dt \mapsto \sum_{\substack{|\alpha|=k\\|\beta|=r}} \int_{\mathbb{C}^r} u(p^*z, t)\,d\bar{t}\,dt \times d\bar{z}^\alpha$$

で $\int_{\mathbb{C}^r}$ が定義され 次を可換にする。

$$\begin{array}{ccccc} \cdots\cdots \longrightarrow & \Gamma_Z(\widetilde{\Delta}_1, & C_{N_1}^{(0,k+r),(r)} & |_{\widetilde{\Delta}_1}) & \longrightarrow \\ & \supset & \downarrow & \supset & \\ \longrightarrow & \Gamma_G(\widetilde{\Delta}, & C_N^{(0,k)} & |_{\widetilde{\Delta}}) & \longrightarrow \end{array}$$

よって $H_Z^{k+r}(\widetilde{\Delta}_1, C\mathcal{O}^{(r)}) \to H_G^k(\widetilde{\Delta}, C\mathcal{O})$

なる morphism が induce される。これで $\mathcal{B}^2$ の積分を定義する。

$$\Delta_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r \xrightarrow{p} \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q = \Delta$$

$Z\subset U\times V\times W$ ($U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$, $V\subset\mathbb{R}^q$, $W\subset\mathbb{R}^r$: opens)

$p|_Z$ proper $p(Z)\subset G\subset U\times V$ とすると

$\Gamma_Z(U\times V\times W, \mathcal{B}^2_{\Delta_1}\otimes v_{\mathbb{R}^r})$ ($v_{\mathbb{R}^r}$: 体積要素)

$= H_Z^{q+r}(U\times V^{\mathbb{C}}\times W^{\mathbb{C}}, C\mathcal{O}^{(r)})$

$\xrightarrow{\int_{\mathbb{C}^r}} H_G^q(U\times V^{\mathbb{C}}, C\mathcal{O}) = \Gamma_G(U\times V, \mathcal{B}^2_\Delta)$

これにより 積分を定義する。

$Z = U\times V\times K_1\times\cdots\times K_r$ $K_j\subset\mathbb{R}$ compact

$W=\mathbb{R}^r$ $W^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^r$ とする。すると定義により

$u\in\Gamma_Z(U\times V\times W,\mathcal{B}^2)$ に対して $\int_{\mathbb{C}^r}u$

$=\int_{\mathbb{C}_{\tau_1}}\cdots\int_{\mathbb{C}_{\tau_r}}u$ が成り立つ。よって以下び

$r=1$ の場合を調べる。

$$\begin{array}{ccccc} Z=U\times V\times K & \hookrightarrow & U\times V^{\mathbb{C}}\times\mathbb{C}=Y_1 & & \tilde{Z}=U\times V^{\mathbb{C}}\times K \\ p\downarrow & & \downarrow & & \\ G=U\times V & \hookrightarrow & U\times V^{\mathbb{C}}=Y & & \end{array}$$

$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{U}'=\{U_i\}_{i\in I_0}\subset\mathcal{U}$ を

$(Y,Y-G)$ の open covering とし $\tilde{\mathcal{U}}=\{\tilde{U}_{a(i)},\tilde{U}_{u(i)}\}_{i\in I}$

$\tilde{\mathcal{U}}'=\{\tilde{U}_{a(i)}\}_{i\in I_0}\cup\{\tilde{U}_{u(i)}\}_{i\in I}$ ただし $\tilde{U}_{a(i)}=p^{-1}(U_i)$

$\tilde{U}_{u(i)}=p^{-1}(U_i)-\tilde{Z}$ とする。$(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}')$ は $(Y_1,Y_1-\tilde{Z})$

の open covering。このとき Weil の補題による

canonical map

$$C:H^{q+1}(C^{\cdot}(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}',\mathcal{O}\mathcal{O}^{(\omega)}))\to H^{q+1}(\Gamma_Z(Y_1,C_{N_1}^{(0,1)}|\tilde{\Delta}_1))$$

$$C:H^{q}(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{O}))\to H^{q}(\Gamma_G(Y,C_N^{(0,0)}|\Delta))$$

がある。これに対して次の命題がある。

命題 2.3.3 (c.f Kashiwara-Kawai [4])

$\varphi\in Z^{q+1}(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{U}}',\mathcal{O}\mathcal{O}^{(\omega)})$ に対し $\int C\varphi=C\psi$

ただし

$$\psi_{i_0\cdots i_q} = \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\nu+1}\int_{\gamma}\varphi_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)b(i_\nu)\cdots b(i_q)}$$

(γ : Kをまわる cycle)

証明) Weilの補題より $\exists\{\varphi_{q+1}=\varphi, \varphi_q \cdots \varphi_0, u\}$
$\varphi_k \in C^k(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}', C_{H_1}^{(0,q-k)(1)}|\tilde{\Delta}_1)$ $u \in \Gamma_z(Y_1, C_{H_1}^{(q+1)(1)}|\tilde{\Delta}_1)$
s.t. $\delta\varphi_k = \bar{\partial}\varphi_{k+1}$ $\delta\varphi_q = \varphi$. $\bar{\partial}\varphi_0 = u$
これから $\psi_k \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}', C_H^{(0,q-k-1)}|\Delta)$ を次のように定義する。

まず $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_{a(i)}, V_{b(i)}\}_{i\in I}$ $V_{a(i)} = V_{b(i)} = U_{a(i)}$
$\tilde{\mathcal{V}}' = \{V_{a(i)}\}_{i\in I_0} \cup \{V_{b(i)}\}_{i\in I}$ として各φ_kを $\tilde{\varphi}_k \in C^k(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{V}}', C_{H_1}^{(0,q-k)(1)}|\Delta_1)$
の元に拡張する。("穴"をうめる) そして

$$\psi_{k\, i_0\cdots i_k} = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu+1}\int_D\{\delta\tilde{\varphi}_k - \bar{\partial}\tilde{\varphi}_{k+1}\}_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)b(i_\nu)\cdots b(i_k)}$$

($k=0\cdots q-1$, $D \supset\supset K$ $\gamma = \partial D$) とおく。
これは Kの外で integrand が0より well defined

<u>claim</u> $\delta\psi_k = \bar{\partial}\psi_{k+1}$ $(k=0\cdots q-2)$
$\bar{\partial}\psi_0 = \delta u$ $\delta\psi_{q-1} = \psi$

∵ $\bar{\partial} = \bar{\partial}_z + \bar{\partial}_\tau$ なる分解に従って, $\upsilon \in C_{H_1}^{(0,k)(1)}|\tilde{\Delta}_1$
に対し $\upsilon = \upsilon^\tau + \upsilon^z$ υ^τ: $d\bar{\tau}$ ふくむ υ^z: ふくまず
と書くことにすると 定義により $\int_D \upsilon = \int_D \upsilon^\tau$
さて

$$\bar\partial_z \psi_{0,i_0} = -\bar\partial_z \int_D \{\delta\tilde\varphi_0 - \bar\partial\tilde\varphi_1\}_{a(i_0)\,b(i_0)}$$

$$= -\bar\partial_z \int_D \{(\delta\tilde\varphi_0)^\tau_{a(i_0)b(i_0)} - (\bar\partial_z \tilde\varphi^\tau_{1\,a(i_0)b(i_0)} + \bar\partial_\tau \tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)b(i_0)})\}$$

$$= -\int_D \{\bar\partial(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)b(i_0)} - \bar\partial_\tau((\delta\tilde\varphi_0)^z_{a(i_0)b(i_0)} - \bar\partial_z\tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)b(i_0)})\}$$

ここで $\bar\partial_z \tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)b(i_0)} = (\bar\partial\tilde\varphi_{1\,a(i_0)b(i_0)})^z$ より

Kの外で $(\delta\tilde\varphi_0)^z_{a(i_0)b(i_0)} = \bar\partial_z\tilde\varphi^z_{1\,a(i_0)b(i_0)}$ よって

Stokesの定理より $= -\int_D \bar\partial(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)b(i_0)}$

ここで $(\delta\tilde\varphi_0)_{a(i_0)b(i_0)} = \tilde\varphi_{0\,b(i_0)} - \tilde\varphi_{0\,a(i_0)} = -\varphi_{0,a(i_0)}$

$(\tilde\varphi_{0\,b(i_0)}=0,\ V_{a(i_0)} = U_{a(i_0)})$

$\therefore\ \bar\partial_z\psi_{0,i_0} = \int_D \bar\partial\varphi_{0\,a(i_0)} = \int_D u$

同様にして $q-1 \ge k \ge 1$ のとき

$$\bar\partial_z \psi_{k,i_0\cdots i_k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+1} \int_D \bar\partial(\delta\tilde\varphi_k)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)\,b(i_\nu)\cdots}$$

がわかる。

あとは $\delta\psi_{k-1}$ であるが、長い単純な計算により

$$(\delta\psi_{k-1})_{i_0\cdots i_k} = \int_D \bar\partial\{\sum(-1)^{\nu+1}(\delta\tilde\varphi_k)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)\,b(i_\nu)\cdots}\}$$

がいえる。すなわち $1\le k\le q-1$ で claim は ok。

また $k=q$ のとき

$$(\delta\psi_{q-1})_{i_0\cdots i_q} = \int_D \bar\partial_\tau \sum(-1)^{\nu+1}(\delta\tilde\varphi_q)_{a(i_0)\cdots a(i_\nu)\,b(i_\nu)\cdots}$$

$$= \int_{\partial D}\sum(-1)^{\nu+1}(\delta\tilde\varphi_q)_{a(i_0)\cdots}$$

$$= \int_{\partial D}\sum(-1)^{\nu+1}\varphi_{a(i_0)\cdots}$$

(∵ ∂Dの近傍では $\delta\tilde\varphi_q = \delta\varphi_q = \varphi$) //

この claim は $C\psi = \int u$ を示している。 //

次に 柏原-河合-木村[6] に従って"原始的"な積分の定義を行う。そして これら2つの定義が一致することを示す。

補題2.3.4 $U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex $D \subset \mathbb{C}^q$ convex $\pi : \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q_{(z_1, z')} \longrightarrow \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^{q-1}_{z'}$

とするとき

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{O}_{z'}(U \times \pi(D)) \to \mathcal{C}\mathcal{O}(U \times D) \xrightarrow{D_{z_1}} \mathcal{C}\mathcal{O}(U \times D) \to 0$$

は exact

証明) $0 \to \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}_{z'} \to \mathcal{C}\mathcal{O} \xrightarrow{D_{z_1}} \mathcal{C}\mathcal{O} \to 0$ より

$$0 \to \mathcal{C}\mathcal{O}_{z'}(U \times \pi(D)) \to \mathcal{C}\mathcal{O}(U \times D) \to \mathcal{C}\mathcal{O}(U \times D) \to H^1(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}_{z'}) \to$$

は exact. $0 \to \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}_{z'} \to \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{E}^{(0,0)}_{z'} \to \cdots$ なる resolution において, §1 の定理 1.1.5 より

$H^k(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}_{z'}) = 0 \ (k \geq 1)$ よって

$$H^j(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}_{z'}) \simeq H^j(\Gamma(U \times D, \pi^{-1}\mathcal{C}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}_{z'}))$$

$$= H^j(\Gamma(U \times \pi(D), \mathcal{C}\mathcal{E}^{(0,\cdot)}_{z'})) = H^j(U \times \pi(D), \mathcal{C}\mathcal{O}_{z'}) = 0$$

$(j \geq 1)$ よって 主張は OK //

系 1) $\mathcal{U} \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ open

$\Rightarrow D_{x_1}\mathcal{B}^2(\mathcal{U}\times\Omega) = \mathcal{B}^2(\mathcal{U}\times\Omega)$

2) $\Omega_1\times\Omega_2 \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{q-1}$ $\Omega_1=(a,b)$ $\Omega_2=$ open

$u \in \mathcal{B}^2(\Omega_1\times\Omega_2)$ で $D_{x_1}u=0 \Rightarrow \exists!\, v\in\mathcal{B}^2(\Omega_2)$

$u(p^*, x) = v(p^*, x')$

証) $\mathcal{B}^2$ の flabbyness より $\Omega=\mathbb{R}^q$ としてよい

$u\in\mathcal{B}^2(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^q)$ とすると $u=\sum b_{\Gamma_j}(\varphi_j)$

$\varphi_j \in C\mathcal{O}(\mathcal{U}\times(\mathbb{R}^q+i\Gamma_j))$ Γ_j: open convex cone

とかける。補題より $\varphi_j = D_{x_1}\overset{\exists}{\psi_j}$ が同じ domain

より $u = D_{x_1}\sum b_{\Gamma_j}(\psi_j)$. //

2) 上と同様にもできるし、また,

$0 \to p^{-1}\mathcal{B}^2_{\Delta'} \hookrightarrow \mathcal{B}^2_{\Delta} \xrightarrow{D_{x_1}} \mathcal{B}^2_{\Delta} \to 0$ (exact)

からもいえる。 //

定義 $u(p^*, x, t) \in \Gamma_{\mathcal{U}\times V\times K}(\mathcal{U}\times V\times\mathbb{R}, \mathcal{B}^2)$

$K=[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする。p^* について localize して

$u(p^*, x, t) = D_t v(p^*, x, t)$ なる v が存在する。

$\mathcal{U}\times V\times(-\infty, a)$ 上で $D_t v=0$ より $v=v_1(p^*, x)$

同様に $\mathcal{U}\times V\times(b,\infty)$ 上で $v=v_2(p^*, x)$ とかける。

ここで $\int_{\mathbb{R}} u\,dt = U_2(p^*, x) - U_1(p^*, x)$ と定義する。これが well defined であることは上の補題の系よりわかる。多変数の場合は反復積分で定義できる。

命題 2.3.6　上の2つの定義は一致する。（符号は除く）

証明）fibre の次元が1のときについていえば十分。

$U \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ open proper convex　$V \subset \mathbb{R}^q$ open convex

$V^{\mathbb{C}} = V + i\mathbb{R}^q$　　$K = [a, b] \Subset [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$

$(U \times V^{\mathbb{C}}, U \times (V^{\mathbb{C}} - V))$ の open covering $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ を

$\mathcal{U} = \{W_0, W_{1\pm} \cdots W_{q\pm}\}$: $W_0 = U \times V^{\mathbb{C}}$.

$W_{j\pm} = U \times (V + i\{\pm y_j > 0\})$

$\mathcal{U}' = \{W_{1\pm} \cdots W_{q\pm}\}$ と定める。これによって induce される $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} - U \times V \times K)$ の covering $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}')$ は

$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{a(0)}\ U_{a(1\pm)} \cdots U_{a(q\pm)}\} \cup \{U_{b(0)} \cdots U_{b(q\pm)}\}$

$\tilde{\mathcal{U}}' = \tilde{\mathcal{U}} - \{U_{a(0)}\}$　$(U_{a(\cdot)} = p^{-1}W.\ U_{b(\cdot)} = U_{a(\cdot)} - U \times V \times K)$

さらに $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V \times \mathbb{R})$ の covering $(\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}')$ を

$\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{U}_0, \tilde{U}_{1\pm} \cdots \tilde{U}_{q+1\pm}\}$ $\quad \tilde{\mathfrak{U}}' = \tilde{\mathfrak{U}} - \{\tilde{U}_0\}$

$(\tilde{U}_0 = U_{a(0)} \cdots \tilde{U}_{q\pm} = U_{a(q\pm)} \quad \tilde{U}_{q+1\pm} = W_0 \times \{\pm \mathrm{Im}\,\tau > 0\})$

とする。すると これらはすべて Leray covering であって

$\tilde{U}_\cdot = U_{a(\cdot)} \quad (\cdot \neq q+1\pm) \quad \tilde{U}_{q+1\pm} \subset U_{b(0)}$ より

次は可換 :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{q+1}_{U\times V\times K}(U\times V\times \mathbb{C}, \mathcal{O}) \arrow[r] & H^{q+1}_{U\times V\times \mathbb{R}}(U\times V\times \mathbb{C}, \mathcal{O}) \\ & H^{q+1}(C^\cdot(\tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\mathfrak{U}}', \mathcal{O})) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "c"] & H^{q+1}(C^\cdot(\tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}, \tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}', \mathcal{O})) \arrow[u, "\wr"', "c"] \\ & {[\varphi]} \arrow[r, mapsto] & {[h\varphi]} \end{tikzcd}$$

ただし $(h\varphi)_{0,1\varepsilon_1 \cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}} = \varphi_{a(0) \cdots a(q\varepsilon_q)\, b(0)}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau > 0}$

さて $u = [h\varphi]$ の境界値表示 は

$$\sum_{\varepsilon = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{q+1})} \mathrm{sgn}\,\varepsilon \; b\left(\varphi_{a(0) \cdots a(q\varepsilon_q)\, b(0)}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau > 0}\right)$$

今 $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(0) \cdots b(0)}\, d\tau$ (積分路は $\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を通る ; well defined) とおくと $D_\tau \tilde{\varphi} = \varphi$ より

$$u = D_\tau \sum_{\varepsilon} \mathrm{sgn}\,\varepsilon \; b(\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}}) = D_\tau v$$

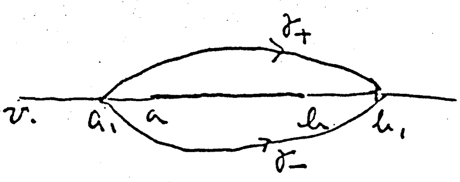
ここで $\mathrm{Im}\,\tau < a$ 上で $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(0) \cdots b(0)}\, d\tau$

は well defined で $\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q}\big|_{\varepsilon_{q+1}\mathrm{Im}\,\tau > 0} = \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q+1\,\varepsilon_{q+1}}$

より $v = 0$ on $U \times V \times (-\infty, a)$.

また $\mathrm{Im}\,\tau > b$ 上で

$\tilde{\tilde{\varphi}}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q} = \int_{b_1}^{\tau} \varphi_{a(0) \cdots}$ は well defined で



$\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q\, q+1\pm} = \int_{\gamma_\pm} \varphi_{a(0) \cdots} + \tilde{\tilde{\varphi}}_{0,1\varepsilon_1 \cdots q\varepsilon_q}$ より

$$\upsilon = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_q)} \operatorname{sgn} \varepsilon \, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)a(1\varepsilon_1)\cdots\ell(0)}\right) \text{ on } \tilde{U}\times\tilde{V}\times(\ell,\infty)$$

よって第2の定義では

$$\int u = \sum_{\varepsilon} \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots\ell(0)}\right) \text{ --- } (*)$$

一方最初の定義によれば

$$\int u = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_q)} \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\sum_{r=0}^{q}(-1)^{r+1}\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(r\varepsilon_r)\ell(r\varepsilon_r)\cdots}\right)$$

ここで φ が cocycle より

$0=(\delta\varphi)_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)\ell(q\varepsilon_q)\ell(0)}$ よって

$$\varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)\ell(0)} = \varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)\ell(q\varepsilon_q)}$$
$$+ (-1)^q \sum_{\ell=1}^{q}(-1)^\ell \varphi_{a(0)\cdots \check{a}(\ell\varepsilon_\ell)\cdots a(q\varepsilon_q)\ell(q\varepsilon_q)\ell(0)}$$

$$\therefore (*) = \sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(q\varepsilon_q)\ell(q\varepsilon_q)}\right)$$
$$+ \sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(q-1\,\varepsilon_{q-1})\ell(q\varepsilon_q)\ell(0)}\right)$$

以下 inductive に $= (-1)^{q+1}\sum \operatorname{sgn}\varepsilon\, b\left(\sum_{r=0}^{q}(-1)^{r+1}\times\right.$

$\left.\int_\gamma \varphi_{a(0)\cdots a(r\varepsilon_r)\ell(r\varepsilon_r)\cdots}\right)$ がいえる。

(番号がぬけているものが $\pm$ でうち消しあう。) //

以上で第2の定義が正当化された。すなわち第2の定義が座標不変であることがわかった。

次に $SS^2\int u$ の評価を与える。

命題 2.3.6 $u(p^*, x, t) \in \Gamma_{\bar{U}\times\bar{V}\times K}(U\times V\times\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^2)$ とすると $SS^2\int_{\mathbb{R}^r} u \subset p(SS^2 u \cap (\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \underset{L}{\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r}))$

証明) $r=1$ について示せば十分

<u>claim</u> $sp\, u(p^*, x, t) = 0$ on $\{(p^*, x, t; \sqrt{-1}(\xi dx + 0dt)\infty);$ $p^* \in U_0$ $x \in V_0$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in W_0\} \Rightarrow sp\int u = 0$ on $U_0 \times V_0 \times W_0$

証明) 次の exact sequence がある:

$$0 \to \sigma^{-1} C^2_{\Lambda'} \hookrightarrow C^2_{\Lambda}|_L \xrightarrow{D_t} C^2_{\Lambda}|_L \to 0$$

$(\sigma: L \to \Lambda' = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q)$

より $0 \to C^2_{\Lambda'}(U_0 \times V_0 \times \sqrt{-1}W_0) \to C^2_{\Lambda}(U_0\times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0) \xrightarrow{D_t}$

よって $u = D_t v$ のとき $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0$ 上

$0 = sp(u) = D_t\, sp(v)$ より $sp(v) = {}^\exists w(p^*, x)$

on $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{-1}W_0$ よって

$sp\int u = sp(v_2 - v_1) = w - w = 0$ //

4° その他

$\int u(p^*, x, t)\delta(t-y)dt = u(p^*, x, y)$ をいう

ために, 次の補題を準備する。

補題 2.3.7. $u(p^*, x, t) \in \mathcal{B}^2(U^p \times V^q \times W^r)$ s.s $S^2 u \cap \{(p^*, x, t, \sqrt{-1}(0dx + S^{r-1}dt)\infty ; (p^*, x, t) \in U \times V \times W\} = \phi$ とする。このとき $u(p^*, x, 0) = u(p^*, x, t)|_{t=0}$, $u(p^*, x, t)\delta(t)$ が定義されるが、実は

$$u(p^*, x, t)\delta(t) = u(p^*, x, 0)\delta(t)$$

証明) (p^*, x) について localize し、また t は 0 の相対 compact 近傍を動くとしてよい。このとき
$\exists F_j \in \mathcal{C}\mathcal{O}(U_0 \times (V_0 \times D + i(\Gamma_j \cap B_\varepsilon)))$ s.t $\Gamma_j^\circ \cap \{0\} \times S^{r-1} = \phi$ $u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$ on $U_0 \times V_0 \times D$

ここで $0 \to \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O} \xrightarrow{\tau\cdot} \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O} \xrightarrow{\tau=0} \mathcal{C}\mathcal{O} \to 0$ なる exact sequence を反復適用して

$$F_j = F_j(p^*, z, 0) + \sum \tau_k F_{jk}(p^*, z, \tau)$$

とかける。おいて.

$$u = \sum b(F_j(p^*, z, 0)) + \sum u_k t_k$$

$SS^2 u_k$ も u と同じ条件をみたすから $u_k \cdot \delta(t)$ は well defined で t_k は real analytic より $(u_k t_k)\delta(t) = u_k(t_k\delta(t)) = 0$

$\therefore\ u\delta(t) = u|_{t=0}\,\delta(t)$ //

これによれば $u(p^*, x, t)\delta(t-y)$

$= u(p^*, x, y)\,\delta(t-y)$ がわかるから

$\int u(p^*, x, t)\,\delta(t-y)\,dt = \int u(p^*, x, y)\,\delta(t-y)\,dt$

$= u(p^*, x, y)\int \delta(t-y)\,dt$ (積分の定義)

$= u(p^*, x, y)$ となる。

5° 応用

以上の演算の応用の一つとして次の定理を示す。

定理2.3.8 (microlocal Holmgren Theorem; Kashiwara-Laurent [7] Théorème 4.2.3 の Special case)

$\Delta = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \supset \{p_0^*\} \times \mathbb{R}^q = S \ni p_0$

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ real analytic $df(p_0) \neq 0$

p_0^* を $(p_0^*, x, \pm\sqrt{-1}\,df(p_0)\infty) \in S \times_{\Delta} \tilde{\Delta}$ の一方とする。

$Z = \{p \in S \ f(p) \geq 0\}$ このとき

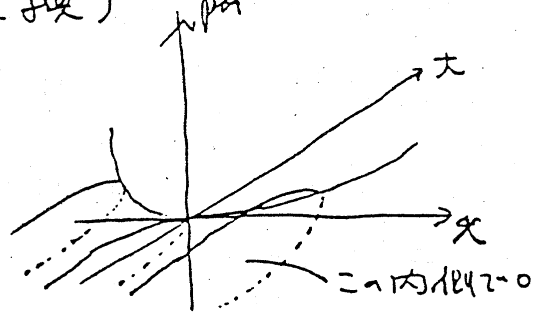
$0 \to \Gamma_Z(\mathcal{B}^2_{\Delta}|_S)_{p_0} \to \mathcal{C}^2_{\Delta, p_0^*}$ exact

証明) 方針は金子[3]に従う。$\mathbb{R}^q$上の

座標変換により $\mathbb{R}^q=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{q-1}_x$ $f(t,x)=t-x^2$

$P_0=(p_0^*,0,0)$ $P_0^*=(p_0^*,0,0,\sqrt{-1}dt\infty)$

としてよい（Holmgren 変換）



$u\in\Gamma_Z(\mathcal{B}^2_\Delta|_S)_{P_0}$

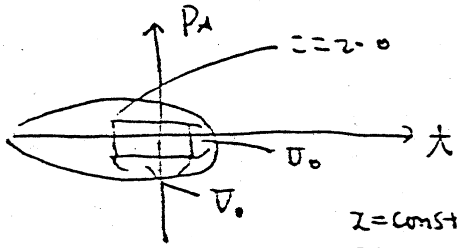
$Sp(u)_{P_0^*}=0$ とする。

$\tilde{u}\in\mathcal{B}^2_\Delta(U\times V\times W)$

$(U\times V\times W\ni(p_0^*,0,0))$ で

$(S-Z)\cap U\times V\times W$ 上で $u=0$ としてよい。

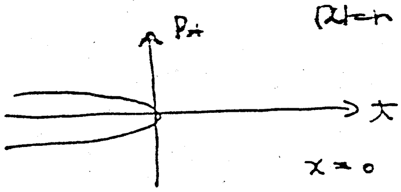
ここで $r>0$ を $\{|x|=r\}\subset W$ と選ぶと



$p_0^*\in{}^\exists U_0\subset U$, $0\in{}^\exists V_0\subset V$

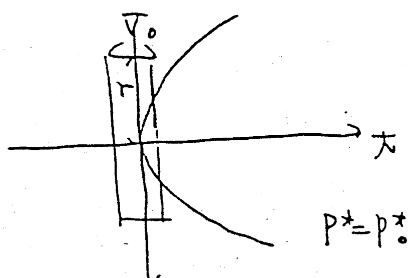
s.t. $U_0\times V_0\times\{|x|=r\}$ 上で $u=0$

よってはじめから



$u\in\mathcal{B}^2_\Delta(U_0\times V_0\times\mathbb{R}^{q-1}_x)$

supp u は x について compact



$\{(p^*,t,x);\ p^*=p_0^*,\ t=0,\ x\neq0\}$

$\cup\{(p^*,t,x);\ p^*=p_0^*,\ t<0\}$

で 0 としてよい。

さらに $Sp(u)_{P_0^*}=0$ より

$Sp(u)$ は $\{(p^*,t,x,\sqrt{-1}(dt+\xi dx)\infty);\ p^*\in{}^\exists U_1,\ |t|<{}^\exists\varepsilon$

$x\in\mathbb{R}^q,\ |\xi|<\varepsilon\}$ で 0 としてよい。$(U_1\subset U_0)$

さて. $f(x) = \sum_\sigma b_{\Gamma_\sigma}(W_\sigma(z)) \underset{\text{def}}{=} \sum W_\sigma(x)$

($W_\sigma(z) = \dfrac{1}{(-2\pi i)^{q-1}} \dfrac{\operatorname{sgn}\sigma}{z_1 \cdots z_{q-1}}$) とかけていて

$SS\, W_\sigma(x) = \{(x, \sqrt{-1}\xi dx\infty),\ \xi \in \Gamma_\sigma^\circ\}$

$f_\sigma(p^*, t, x) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{q-1}} f(p^*, t, u)\, W_\sigma(x-u)\, du$

とおく。これは $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R}^{q-1}$ で well defined

すると 積. 積分の SS^2 の評価より

$SS^2 f_\sigma \subset \{(p^*, t, x, \sqrt{-1}(a\,dt + \xi dx)\infty\ ;$

$\exists u.\ (p^*, t, u, \sqrt{-1}(a, \xi)\infty \in SS^2 f.\ \xi \in \Gamma_\sigma^\circ\}$.

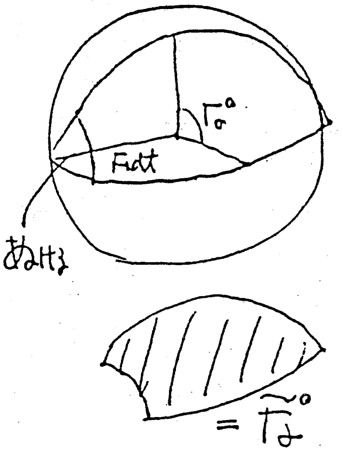
($\xi = 0$ も許す).

ここで 上でのべたことより $A = U_1 \times \{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ 上では

$(\sqrt{-1}dt + \xi dx)\infty\ (|\xi| < \varepsilon)$ がぬける。

∴ $SS^2(f_\sigma|_A) \subset \{(p^*, t, x;\ \sqrt{-1}(a\,dt + \xi dx)\infty.\ (a, \xi) \in \tilde\Gamma_\sigma^\circ\}$

$\tilde\Gamma_\sigma$: proper convex in $\mathbb{R}^{q+1}$



おって $0 \to \tilde{\mathcal{A}}^2 \to \tau^{-1}\mathcal{B}^2 \to \pi_* \tau^{-1}\mathcal{C}^2 \to 0$

より $f_\sigma|_A = b(\tilde{G}_\sigma(p^*, \tau, z))$

$G_\sigma \in \mathcal{O}((U_1 \times [\{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1} + i\tilde\Gamma_\sigma])^\circ)$

ここで $\forall t < 0$, $\exists U_t \times V_t \ni (p_0^*, t)$

s.t. $f = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$

おって $f_\sigma = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$ $|t|$ 十分小

⇒ $V_t \subset \{|t| < \varepsilon\}$ とれるから

$b(G_\sigma)|_{U_* \times V_* \times \mathbb{R}^{q-1}} = 0$ b の injectivity より

$G_\sigma = 0$ on $U_* \times V_* \times \mathbb{R}^{q-1}$ の fibre よって $C\mathcal{O}$ に対する解析接続の一意性により $G_\sigma = 0$ on

$U_* \times \{|t| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ の fibre

$\therefore f_\sigma|_{U_* \times \{|t|<\varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}} = b(G_\sigma) = 0$

$\therefore 0 = \sum_\sigma f_\sigma = f \underset{x}{*} \delta = f$ on $U_* \times \{|t|<\varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$

最後の集合は p_0 の近傍である。 //

<u>Remark</u> 定理の最初にも書いたとおり．この定理は Kashiwara-Laurent [7] に述べられている次の定理：

定理 $\Lambda \subset \sqrt{-1}T^*M$ *homogeneous involutory submanifold*, $x_0 \in \Lambda$ S_{x_0}：x_0 を通る，Λ の *bicharacteristic leaf* とし．$f: S_{x_0} \to \mathbb{R}$ を x_0 の近傍で定義された real analytic map で $f(x_0) = 0$. $df(x_0) \neq 0$ なるものとし，x_0^* を $(x_0, \pm\sqrt{-1}\,df(x_0))$ の一方とする．$x_0^* \in \sqrt{-1}T^*S_{x_0} \simeq (T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}) \underset{\Lambda}{\times} S_{x_0}$

$Z = \{x \in S_{x_0}\,;\, f(x) \geq 0\}$ とする．このとき

$$0 \to \Gamma_Z(\mathcal{B}^2_\Lambda|_{S_{x_0}})_{x_0} \to \mathcal{C}^2_{\Lambda, x_0^*} \quad \text{exact}$$

の special case である。上記論文においては，まず Λ を1変数ふやして regular involutory にしたのち，それを，quantized canonical transformation によって 標準形 $\Lambda \simeq iS^*\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^2$ に写すことができることが示されていて，結局上の special case に帰着されるのであるが，上記論文においてはその後 purely cohomological method を用いてやや弱い形を証明し，あとは geometrical な方法で上の結果を得ている。ここでは，別証明として拙ながらの直観的な証明を試みてみた。

系　同じ条件のもとで　$0 \to \Gamma_\Sigma(\mathcal{C}_M|_{S_{x_0}})_{x_0} \to \mathcal{C}^2_{\Lambda_1, x_0^*}$
(exact)

この系の弱形は Bony [13] において既に用いられ，また Schapira によって propagation of singularities にも用いられている。(c.f. Kashiwara-Laurent [7], Grigis, Schapira, Sjöstrand [14])

さらに，次の命題がいえる。

命題 2.3.9.（c.f. 柏原－河合－木村［6］，金子［B］）
$\Lambda = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $\Lambda_1 = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times S^{q-1}$
とする。（$\Lambda_1 \simeq S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$）このとき Λ_1 上の
sheaf homomorphisms $\Phi : \mathcal{C}^2_\Lambda \to \mathcal{B}^2_{\Lambda_1}/\mathcal{a}^2_{\Lambda_1}$
$\Psi : \mathcal{B}^2_{\Lambda_1}/\mathcal{a}^2_{\Lambda_1} \to \mathcal{C}^2_\Lambda$ があって，
$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id} : \mathcal{C}^2_\Lambda \to \mathcal{C}^2_\Lambda$ を満たす。

証明は，柏原による $\mathcal{C}$ の flabbyness の証明で用いられた積分核を用いて全く同様になされる。（具体的な証明は，$\mathcal{C}^2_\Lambda$ の積分をまだ定義していないので，金子［B］の定理 4.6.5 の証明の方針にそってなされる。）

系 $K \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: compact proper convex
$W \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$: compact とすると
$\forall u \in \Gamma(K \times W, \mathcal{C}^2_\Lambda)$. $\exists \tilde{u} \in \Gamma(S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}, \mathcal{C}^2_\Lambda)$
s.t. $\tilde{u}|_{K\times W} = u$. かつ $\forall L \times V \subset S^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$
（$L \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$: 相対 compact proper convex $V \subset \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$
相対 compact）に対し．$\exists v \in \Gamma(L \times \pi(V), \mathcal{B}^2_\Lambda)$

s.t. $\hat{u} = sp(v)$

証明) $u \in \Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{C}^2_\Lambda) \Rightarrow \Phi u \in \Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{A}^2_{\Delta_1})$
ここで

$$0 \to \mathcal{A}^2_{\Delta_1} \to \mathcal{B}^2_{\Delta_1} \to \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{A}^2_{\Delta_1} \to 0$$

で、$H^1(K\times\overline{W}, \mathcal{A}^2_{\Delta_1}) = \varinjlim_{U\times\Omega\supset K\times\overline{W}} H^1(U\times\Omega, \mathcal{O})$ $=0$ (∵) $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ は proper convex open, Ω: $\overline{W}$の複素近傍は Stein としてよい) より

$$0\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{A}^2_{\Delta_1})\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1})\to\Gamma(K\times\overline{W}, \mathcal{B}^2_{\Delta_1}/\mathcal{A}^2_{\Delta_1})\to 0$$

あとは、$\mathcal{B}^2_{\Delta_1}$ の flabbyness と Φ, Ψ が sheaf homomorphism であることから第1の主張はOK。第2の主張は

$$0\to\mathcal{A}^2_\Lambda\to\mathcal{B}^2_\Lambda\to\pi_*\mathcal{C}^2_\Lambda\to 0$$

と、$\mathcal{A}^2_\Lambda$に対する上と同じ消滅定理によりOK。//

この系は、flabbyness, softness とはほど遠いものであるが、少くとも上の形の直積型 compact の上では $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の元を $\mathcal{B}^2_\Lambda$ の元で代表させることができて、積分等も直観的に定義できることや、$\mathcal{C}^2_\Lambda$について、$\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$ 変数に関して Support を compact に

cut できること等がいえる。

文 献

[1] Andreotti-Grauert : Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,
Bull. Soc. Math. France. 90 (1962)

[2] Douady : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
Astérisque 16 (1974)

[3] 金子晃 : 超函数入門 上,下
東京大学出版会. (上 : 1980, 下 : 1982)

[4] Kashiwara : Cours à paris-Nord (1978)

[5] Kashiwara-Kawai : On holonomic systems of microdifferential equations III
Publ. RIMS. kyoto. Univ. 17. No.3. (1981)

[6] 柏原-河合-木村 : 代数解析学の基礎
紀伊國屋書店 (1980)

[7] Kashiwara-Laurent : Téorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation
Paris-Sud. ORSAY : Pre print

[8] Kataoka : On the theory of Radon transformations of hyperfunctions

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA 28. No2. (1981)

[9] 小松彦三郎：佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式
東大セミナリーノート 22 (1968)

[10] ——— ：グロタンディク空間と核定理
上智大学数学講究録 No 9. (1981)

[11] 森本光生：佐藤超函数入門
共立出版 (1976)

[12] Sato-Kawai-Kashiwara (S-K-K) : Microfunctions and Pseudodifferential equations
Lecture Notes in Math 287. Springer (1973)

[13] Bony : Extensions du théorème de Holmgren
Séminaire Goulaouic-Schwartz (1975-1976)

[14] Grigis-Schapira-Sjöstrand : propagation de singularités analytiques pour des opérateurs à caractéristiques multiples
Note aux C.R.A.S, Paris, 353 (1981) Série I